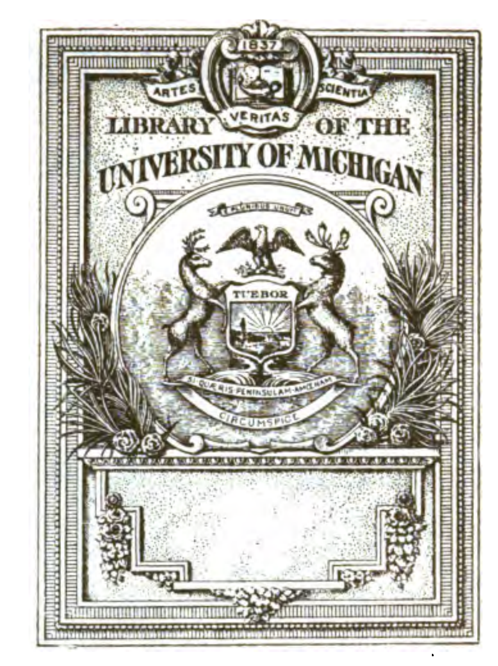
[redacted] XA ... EN.



Nr. 1. F ... —.80.
» 2. C ... Ver- h ... – und A ...
» 7. F ... —.80. v ... rausg.
» 10. F ... röme. (1 ...
» 11. G ... n üb. z ... . Tag m ... v. A. v ...
» 12. L ... bert. (1 ...
» 13. C ... mus. (1 ... xtfig. (8 ...
» 20. Cl ... von E ...
» 21. W ... tro- ly ... ald. (8 ...
» 23. – ... 2 S.) ℳ 1.00.

» 24. **Galileo Galilei,** Unterredungen u. mathem. Demonstrationen über 2 neue Wissenszweige etc. (1638.) 3. u. 4. Tag mit 90 Fig. im Text. Aus dem Italien. u. Latein. übers. u. herausg. von A. von Oettingen. (141 S.) ℳ 2.—.

» 25. —— —— (1638.) Anhang zum 3. u. 4. Tag, 5. u. 6. Tag, mit 23 Fig. im Text. Aus dem Italien. u. Latein. übers. u. herausg. von A. von Oettingen. (66 S.) ℳ 1.20.

» 31. **Lambert's** Photometrie. (Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae). (1760.) Deutsch herausg. v. E. Anding. Erstes Heft: Theil I und II. Mit 35 Fig. im Text. (135 S.) ℳ 2.—.

» 32. —— —— Zweites Heft: Theil III, IV und V. Mit 32 Figuren im Text. (112 S.) ℳ 1.60.

» 33. —— —— Dritte ... VII. — Anmerkungen. Mit 8 ... 2.50.

... ite des Umschlages.

Alexander Ziwet

Theorie der LUFTSCHWINGUNGEN in Röhren mit offenen Enden.

Von

Hermann Ludwig Ferdinand von

H. HELMHOLTZ.

(1859.)

Herausgegeben

von

A. Wangerin.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1896.

[1]

Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.

Von

H. Helmholtz.

(Crelle-Borchardt, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LVII, S. 1—72. Berlin 1860).

Die mathematische Theorie der Orgelpfeifen ist von den bedeutendsten mathematischen Physikern vielfältig behandelt worden, aber seit den ersten Schritten, welche *D. Bernoulli* und *Euler* gethan haben, und durch welche die Hauptzüge der Erscheinung eine annähernde Erklärung fanden, um keinen wesentlichen Schritt vorgerückt. Der Grund davon hat hauptsächlich darin gelegen, dass die Mathematiker es nicht wagten, die Annahme aufzugeben, dass die Bewegung der Lufttheilchen im Innern der Röhre überall ihrer Axe parallel gerichtet, und sowohl die Geschwindigkeit wie der Druck in allen Punkten desselben Querschnitts der Röhre gleich gross sei. Diese von den ersten Bearbeitern der Einfachheit wegen gemachte Annahme ist ganz unbedenklich für die von offenen Enden entfernteren Theile einer cylindrischen oder prismatischen Röhre, aber in der Nähe offener Enden, wo die ebenen Wellen der Röhre in den freien Raum überzugehen anfangen, um sich dort in Form kugeliger Wellen auszubreiten, ist jene Annahme nicht mehr zulässig, da es klar ist, dass ein solcher Uebergang nicht sprungweise geschehen kann. *Bernoulli*, *Euler* und *Lagrange* hatten angenommen, dass die Verdichtung am offenen Ende der Röhre stets gleich Null sei. Dass sie sehr viel kleiner sein müsse als bei den gleichen Wellenphasen im Innern der Röhre, wo die bewegte Luft von den Röhrenwänden

gehindert wird, sich seitlich auszudehnen, ist leicht einzusehen, da am offenen Ende kein anderes Hinderniss ihrer Ausdehnung besteht als die Trägheit der benachbarten Luftmassen. In so fern nähert sich jene Annahme und die darauf basirte Theorie allerdings sehr der Wahrheit, aber sie ist nicht vollständig richtig. Denn die Dichtigkeit am Ende der Röhre muss allerdings gleich gesetzt werden der Dichtigkeit der anstossenden Luft im freien Raume, aber nicht der constanten Dichtigkeit der ruhenden Luft, sondern der veränderten Dichtigkeit dieser selbst in Vibration gerathenen Luft. Deshalb widersprechen die Folgerungen aus jener Annahme auch in mancher anderen Beziehung der Erfahrung. So folgt daraus, wie [2] schon *Poisson* hervorgehoben hat, dass bei gewissen Röhrenlängen die Schwingungen im Innern, welche eine endliche Kraft oder eine endliche mitgetheilte Bewegung erregt, unendlich gross werden und, einmal erregt, nicht wieder erlöschen, weil sie nichts von ihrer lebendigen Kraft der äusseren Luft mittheilen. *Euler**) selbst hatte diese Abweichungen dadurch erklären wollen, dass die Erschütterung sich zum Theil den Wänden der Röhre mittheilte und dadurch der Luftmasse verloren ginge. *Poisson***) suchte den Grund richtiger in dem Umstande, dass die Verdichtung am offenen Ende der Röhre nicht vollständig gleich Null, sondern nur sehr klein sei. Aber er wusste ihren wirklichen Werth nicht zu finden, sondern baute seine Theorie auf eine neue Hypothese, welche sich in unserer Untersuchung als im Allgemeinen unrichtig erweisen wird. Er machte nämlich die Annahme, dass die Verdichtung am Ende der Röhre proportional der Geschwindigkeit sei, wie sie es bei ebenen fortschreitenden Wellen ist. Wenn die Geschwindigkeit v, die Verdichtung s, die Schallgeschwindigkeit a ist, so setzt er

$$kv = as.$$

Die Constante k nimmt er an geschlossenen Enden als sehr klein, an offenen als sehr gross an; ihr wirklicher Werth bleibt unbestimmt. Dieser Annahme gemäss müssten am offenen Ende der Röhre die Maxima der Geschwindigkeit mit den Maximis der Verdichtung der Luft der Zeit nach zusammenfallen. Im Gegentheil wird die von uns anzustellende vollständigere Analyse zeigen, dass beide nahehin um ein Viertel

---

*) Novi Commentarii Acad. Petrop. Tom. XVI, p. 347.
**) Mémoires de l'Académie des Sciences 1817 T. II, p. 305.

der Schwingungsdauer auseinanderfallen. *Poisson's* Annahme beseitigt die genannten Uebelstände der früheren Theorien, indem bei seiner Hypothese allerdings Schall in den freien Raum übergeht, und deshalb die Schallschwingungen in der Röhre schnell erlöschen, sobald die erregende Kraft aufgehört hat zu wirken. Wie viel Schall aber in den freien Raum bei jeder Reflexion der Schallwellen übergeht, hängt von dem unbekannten Werthe der Constante k ab, und bleibt deshalb selbst unbekannt.

Andererseits folgt aus *Poisson's* wie aus der älteren Annahme, dass die Flächen kleinster Bewegung (Knotenflächen) genau um eine Viertelwellenlänge vom offenen Ende der Röhre abstehen, was allen älteren und neueren Erfahrungen über die Höhe der durch Anblasen erzeugten Töne und der durch [3] die Resonanz der Röhre verstärkten Töne widerspricht und durch die directen Versuche von *Hopkins* über die Lage der Knotenflächen widerlegt wird. Diese Flächen sind in offenen cylindrischen und prismatischen Röhren vom Ende der Röhre etwas weniger entfernt, als die Viertelwellenlänge beträgt. Gegen *Poisson's* Versuch, zu erklären, warum beim Anblasen beiderseits offener Röhren tiefere Töne entstehen, als seine Theorie erwarten lässt, haben schon *Quet* und *Zamminer* gegründete Bedenken erhoben. *Poisson's* Formeln ergeben nämlich, dass, wenn eine Bewegung von bestimmter Amplitude der Luft der Röhre in einem Knotenpunkte mitgetheilt wird, die Amplitude in den Schwingungsbäuchen sehr gross wird, nämlich von derselben Ordnung wie *Poisson's* Constante k. Daraus schliesst er, dass für diesen Fall die Amplituden der Schwingung grösser würden, als es die bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen gemachte Annahme unendlich kleiner Vibrationen erlaubte. Unter diesen Umständen sei also Schallbewegung unmöglich, und es könnten deshalb beim Anblasen der Röhre nur Töne entstehen, die sich dieser Grenze der Tonhöhe näherten, wirklich aber immer tiefer bleiben müssten. Mathematisch ist dieser Schluss unzulässig, denn wie gross auch die übrigens durchaus unbekannt bleibende Grösse k sein mag, so würde doch immer die Grösse der mitgetheilten Amplitude so klein gewählt werden können, dass die Bewegungsgleichungen der Schallbewegung anwendbar bleiben, und auch der Erfahrung widerspricht diese Darstellung. Allerdings tritt in den Versuchen von *Hopkins* die Schwierigkeit, der Luft der Röhre in einer Knotenfläche eine gegebene Bewegung

mitzutheilen, deutlich in die Erscheinung, weil nämlich hier der Widerstand der Luft den Schwingungen der von *Hopkins* angewendeten schwingenden Platten am meisten hinderlich wird. Die lebendige Kraft der Bewegung, welche der schwingende Körper an die Luft abgeben muss, um die starke Resonanz der Röhre zu unterhalten, wird hier am bedeutendsten, und wenn also der schwingende Körper nicht genügend viel lebendige Kraft erzeugen und abgeben kann, hört er auf zu schwingen. Wendet man dagegen Platten an, die von Stimmgabeln erschüttert werden, deren Vibrationen zu kräftig sind, um durch den Luftwiderstand erheblich verändert zu werden, so erhält man gerade in den Fällen die vollste und schönste Resonanz, wo die Platte in einer Knotenfläche der Röhre liegt, und nach *Poisson* die Resonanz unmöglich wäre. Ausserdem zeigt sich in den Versuchen von *Hopkins* die Schwierigkeit des Tönens der Platten gerade bei solchen Tönen, wie sie das Anblasen der Röhre giebt, aber nicht bei [4] den etwas höheren Tönen, welche *Poisson* als unmöglich betrachtet; diese kommen ohne Schwierigkeit zu Stande.

Es hat übrigens *Quet* *) diese Unzulänglichkeiten von *Poisson*'s Theorie, die nicht nothwendig aus seiner Fundamentalhypothese fliessen, verbessert, während er sich übrigens dieser Hypothese anschliesst und ihre Richtigkeit wahrscheinlich zu machen sucht.

Hopkins **) hat die Beschränkung, welche in *Poisson*'s Grenzbedingung für das offene Ende der Röhre liegt, weggelassen und nur die Bedingung festgehalten, dass der Druck am offenen Ende klein sein müsse, und dadurch die Möglichkeit offen behalten, in seinen Formeln die Uebereinstimmung mit den Thatsachen vollständig zu bewahren, aber freilich bleiben die Constanten, von denen die Lage der Knotenflächen und die Phasenunterschiede in den einzelnen Theilen der Röhre abhängen, in der Theorie unbekannt. Dagegen hat *Hopkins* eine Reihe wichtiger Versuche über die Lage der Knotenpunkte und die Tonhöhe ausgeführt, um eine jener Constanten wenigstens empirisch zu bestimmen.

Duhamel †) stellte sich zur Aufgabe, den Einfluss der

---

*) *Liouville* Journal, Tom. XX, p. 1.

**) Transactions of the Cambridge Philos. Soc. Vol. V. — *Poggendorff*'s Annalen Bd. XLIV, p. 246.

†) *Liouville* Journal, Tom. XIV, p. 49.

der Axe nicht parallelen Bewegungen in Röhren zu ermitteln. Da er aber für das offene Ende sich mit der einfachen Annahme begnügt, dass hier der Druck gleich Null sei, verschwindet der Einfluss, den die seitlichen Bewegungen der Lufttheile hier haben, aus seiner Rechnung, und er kommt zu dem Schlusse, dass die Differenz zwischen Theorie und Erfahrung nicht von dem Vorkommen solcher Bewegungen abhängt.

*Masson**) endlich vertheidigt die Theorie von *Poisson* im Ganzen und sucht die Uebereinstimmung zwischen ihr und der Erfahrung durch eine neue Hypothese über die Bewegungsart der Luft in dem der Anblaseöffnung nächsten Abschnitte der Luftsäule herzustellen.

Uebrigens ist es klar, dass, sobald die Gestalt des ganzen Luftraums, sowohl des inneren der Pfeife als des äusseren, gegeben ist — wir nehmen ihn im Folgenden immer als von festen Wänden begrenzt an — und wenn ferner die den Schall erregenden Kräfte gegeben sind, die Aufgabe mathe-[5] matisch vollständig bestimmt ist, und keine weitere Hypothese über den Zustand der Luft am offenen Ende einer Pfeife zu machen ist. Eine richtig angestellte Analyse der Aufgabe muss darüber vollständigen Aufschluss geben.

Akustische Untersuchungen, bei denen ich über die bisher unerledigten Punkte der Theorie Auskunft brauchte, waren für mich die Veranlassung, die Untersuchung aufzunehmen, in welcher Weise sich ebene Schallwellen, die in der Tiefe einer cylindrischen Röhre erregt worden sind, bei ihrem Uebergange in den freien Raum verhalten, und ich habe gefunden, dass die gegenwärtigen Hülfsmittel der Analysis ausreichen, über die wesentlichen hier in Betracht kommenden Fragen genügende Auskunft zu geben, ohne dass es nöthig ist, irgend eine Hypothese zu machen.

Die Kräfte der Analyse sind in den bisherigen Arbeiten über Theorie des Schalles hauptsächlich darauf hin angespannt worden, den Verlauf einer ursprünglich vorhandenen Gleichgewichtsstörung in einer Luftmasse, die übrigens keiner Einwirkung fremder Kräfte unterliegt, zu bestimmen. Bei den Tönen der Pfeifen ist aber dieses Problem von verhältnissmässig untergeordneter Wichtigkeit. Es handelt sich hauptsächlich darum, die Schwingungsform zu ermitteln, welche

*) Annales de Chimie et de Physique, Sér. 3, Tom. XL, p. 418.

schliesslich sich dauernd herstellt, wenn die die Schwingungen erregende Ursache dauernd und gleichmässig fortwirkt. Es ist ferner unnöthig, dass wir die Analyse durch Beibehaltung der willkürlichen Functionen verwickelter machen, welche die Form der ursprünglich erregten Schwingung ausdrücken. Wir werden vielmehr voraussetzen, dass diese Vibrationen denen eines einfachen Tones von n Schwingungen in der Secunde entsprechen, also von der Form $\cos(2\pi n t + c)$ sind. Die Willkürlichkeit der Form würde sich ja auch nach erfolgter Auflösung des Problems immer leicht herstellen lassen durch Zusammensetzung einer grösseren Zahl von solchen einfachen Tönen.

Da somit die Form der Aufgabe etwas anders gefasst wird, als es in den akustischen Untersuchungen bisher geschehen war, ist es nöthig, in den ersten fünf Paragraphen einige allgemeine Untersuchungen über die Natur der hier vorkommenden Functionen vorauszuschicken. Es zeigt sich, dass wir es dabei mit Functionen zu thun haben, die, wenn die Wellenlänge unendlich gross wird, übergehen in die Formen der elektrischen (oder magnetischen) Potentialfunctionen, und dass eine ganze Reihe der interessanten Eigenschaften, die für diese Functionen bekannt sind, auch für jene gelten. Da ich schon in einer früheren Arbeit für die Function, deren Differentialquotienten, [6] nach drei rechtwinkeligen Coordinatenaxen genommen, die drei entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit geben, den Namen des Geschwindigkeitspotentials[1]) vorgeschlagen habe, so lässt sich diese Analogie auch weiter in der Bezeichnung festhalten. Den elektrischen Massenpunkten entsprechen die Erregungspunkte des Schalls, der Masse der ersteren die Intensität der letzteren. Sind die letzteren continuirlich im Raume oder auf einer Fläche vertheilt, so lässt sich der Begriff der Dichtigkeit auf sie übertragen, und es lassen sich in beiden Fällen Beziehungen ganz analoger Art zwischen ihrer Dichtigkeit und den Differentialquotienten des Geschwindigkeitspotentials aufstellen, wie sie für die elektrische Dichtigkeit und die Differentialquotienten der elektrischen Potentialfunctionen gelten.

Den Hauptnutzen gewährt aber die Uebertragung des Theorems von *Green* *) auf die hier vorliegenden Verhältnisse,

---

*) *Crelle's* Journal Bd. XLIV, S. 360.

welches sich schon für die Theorie der Elektricität und des Magnetismus so ausserordentlich fruchtbar gezeigt hat. Von allgemeinen Sätzen, die daraus herfliessen, sollen nur folgende hervorgehoben werden: 1) Die Schallbewegung in jedem allseitig begrenzten Raume, welcher keine Erregungspunkte enthält, kann stets dargestellt werden als ausgehend von Erregungspunkten, die nur längs der Oberfläche des Raumes in einer oder zwei einander unendlich nahen Schichten ausgebreitet sind. 2) In jedem Raume, dessen sämmtliche Dimensionen verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind, können für das Geschwindigkeitspotential der Luftbewegung die analytischen Formen der elektrischen Potentialfunctionen gesetzt werden, welche von jenem nur unendlich wenig unterschieden sind. 3) Wenn in einem theils von endlich ausgedehnten festen Wänden begrenzten, theils unbegrenzten Raume Schall im Punkte a erregt wird, so ist das Geschwindigkeitspotential in einem anderen Punkte b so gross, als es in a sein würde, wenn dieselbe Schallerregung in b stattfände.

Speciell werden in § 1 die Bewegungsgesetze der Luft für die vorliegende Aufgabe umgeformt, in § 2 die allgemeinen Formen des Geschwindigkeitspotentials für einen von Erregungspunkten freien Raum untersucht, in § 3 die Beziehungen zwischen der Dichtigkeit continuirlich verbreiteter Erregungspunkte und dem Geschwindigkeitspotential festgestellt, in § 4 [7]dieselben für Erregungspunkte, die continuirlich über eine Fläche verbreitet sind, und das Theorem von *Green* auf die Schallbewegung übertragen, in § 5 endlich werden die Grenzbedingungen für weit von den Erregungspunkten entfernte Flächen aufgestellt, durch welche die Wellen in den unendlichen freien Raum hinauslaufen.

Nachdem so die wichtigsten allgemeinen Gesetze der elektrischen Potentialfunctionen für die Lehre von den Schallwellen anwendbar gemacht worden sind, werden die allgemeinen Gesetze der Bewegung der Luft in Röhren mit offenen Mündungen durch wiederholte Anwendung des *Green*'schen Satzes in § 6 abgeleitet. Es wird hier zunächst vorausgesetzt, dass die Röhren unendlich lang und cylindrisch von beliebigem Querschnitte seien. Nur in einer so kleinen Entfernung von ihrer Mündung, dass deren Grösse gegen die

Wellenlänge vernachlässigt werden kann, darf die Röhre in beliebiger Weise von der cylindrischen Form abweichen, und z. B. trompetenförmig erweitert oder verengt sein. Ebenso werden die Dimensionen der Oeffnung als sehr klein gegen die Wellenlänge betrachtet. Da auch die Gestalt des äusseren Luftraums bestimmt sein muss, wird angenommen, derselbe sei durch eine gegen die Axe der Röhre senkrechte Ebene einseitig begrenzt, mit welcher auch die Ebene der Mündung zusammenfällt. Ueber die Bewegung wird vorausgesetzt, dass Vibrationen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen angehören, irgendwo in der Röhre dauernd erregt werden, und dass zwischen der Erregungsstelle und der Mündung ein Abschnitt der Röhre existire, in welcher die Bewegung nicht merklich von der ebener Wellen unterschieden sei. Mittelst des *Green*'schen Satzes kann man nun, ohne die specielle Form der Mündung und der Luftbewegung in der Mündung zu kennen, gewisse Beziehungen herleiten zwischen diesen ebenen Wellen und den sich halbkugelförmig ausbreitenden Wellen in den entfernten Theilen des freien Raumes, und dadurch die bisher offen gebliebenen Fragen über den Einfluss des offenen Endes auf die ebenen Wellen beantworten, so weit sie allgemein beantwortet werden können.

Nehmen wir die Axe der Röhre als Axe der x, und die Ebene der Mündung als Ebene der yz, so dass der freie Raum den positiven x, die Röhre den negativen entspricht, so ist bei passender Festsetzung des Anfangspunktes der Zeit t die allgemeine Form des Geschwindigkeitspotentials in dem Theile der Röhre, wo die Wellen eben sind, wenn wir die Wellenlänge [8] gleich $\frac{2\pi}{k}$ setzen:

$$\psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos(2\pi n t) + \mathfrak{B}\cos kx \, . \, \sin(2\pi n t).$$

In den unendlich entfernten Theilen des freien Raumes dagegen, wo r die Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten bezeichnet, ist

$$\psi \doteq M\frac{\cos(kr - 2\pi n t)}{r}.$$

Nach *Euler*'s Theorie würde $B = \mathfrak{B} = 0$ sein, nach *Poisson's* $B = 0$, $\mathfrak{B}$ eine unbestimmte kleine Grösse, nach *Hopkins* sowohl B wie $\mathfrak{B}$ unbestimmte kleine Grössen, M bleibt

in allen dreien unbekannt. Wir finden folgende Beziehungen, wenn wir unter Q die Grösse des Querschnitts der Röhre verstehen, und die Fläche der Oeffnung gegen das Quadrat der Wellenlänge als verschwindend klein betrachten:

$$AQ = -2\pi M,$$
$$kAQ = -2\pi \mathfrak{B}.$$

Zwischen A und B lässt sich keine allgemeine, von der Form der Mündung unabhängige Beziehung aufstellen. Nur lässt sich nachweisen, dass, wenn der Querschnitt der Röhre zur Fläche der Oeffnung ein endliches Verhältniss hat, $\frac{B}{A}$ eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie die Dimensionen der Oeffnung ist, die aber jeden beliebigen Werth annehmen kann, wenn die Oeffnung sehr klein gegen den Querschnitt ist.

Wir setzen das Verhältniss[2])

$$\frac{kB}{A} = -\operatorname{tang} k\alpha$$

und nennen dann die Grösse $\alpha - x_0$ die reducirte Länge des Stücks der Röhre, welches zwischen $x = 0$ und $x = -x_0$ liegt, die Grösse α selbst die Differenz der wahren und reducirten Länge der Röhre.

Nachdem diese Beziehungen zwischen den Coefficienten ermittelt sind, wird in § 7 die Form der Wellen in der Röhre näher bestimmt. Knotenflächen, d. h. Flächen kleinster Bewegung, liegen, wo die reducirte Länge der Röhre gleich einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge ist, Schwingungsbäuche oder Maxima der Bewegung, wo die reducirte Länge ein gerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist. Die Phasen der Bewegung sind am Orte der Maxima um die Zeit einer Viertel-Undulation von denen am Orte der Minima verschieden.

[9] Die Knotenflächen sind zugleich Stellen des grössten Wechsels der Dichtigkeit, die Bäuche Stellen des kleinsten Wechsels der Dichtigkeit. In nächster Nähe der Knotenflächen und der Flächen stärkster Bewegung fällt die stärkste nach der Mündung gerichtete Geschwindigkeit der Zeit nach zusammen mit der stärksten Verdichtung. In den zwischenliegenden Abtheilungen der Röhre aber liegen beide um eine Viertel-Schwingungsdauer auseinander.

Wenn man die Lage des Geschwindigkeitsmaximums und die des Verdichtungsmaximums für einen jeden einzelnen Zeitmoment bestimmt, so findet man für die fortschreitenden Wellen in den entfernteren Stellen des freien Raumes bekanntlich, dass beide mit der constanten Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen fortschreiten, und dabei allmählich an Grösse abnehmen. Auch in der Röhre bewegt sich das Geschwindigkeitsmaximum vorwärts gegen die Mündung hin, aber so, dass sein absoluter Werth am Ort der Bäuche sehr gross, in den Knotenflächen sehr klein ist, und ferner so, dass die Geschwindigkeit seiner Fortbewegung in den Bäuchen sehr klein, in den Knoten sehr gross ist, so dass es überall, wo sich ein Bauch befindet, während einer halben Schwingungsdauer fast ganz still steht, um zu Ende dieser Zeit schnell auf den Ort des nächsten Bauches fortzuschreiten, an dem es dann wieder eben so lange fast stillsteht. Ebenso bewegt sich das Verdichtungsmaximum, nur dass es in den Knotenflächen anhält und gross ist, während es am Ort der Bäuche klein ist und schnell vorwärts eilt.

Die gewonnenen Resultate können weiter benutzt werden, um die Stärke der Resonanz und die Phasen der in der Luft erregten Schwingungen bei verschiedenen Erregungsweisen des Schalls genau zu bestimmen.

Wenn die Röhre in irgend einem Querschnitte durch eine feste Platte begrenzt ist, welche durch eine äussere Kraft (z. B. eine aufgesetzte Stimmgabel) in eine schwingende Bewegung versetzt wird, deren Grösse durch den Widerstand der Luft nicht merklich verändert werden kann, so ist die Resonanz am stärksten, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist, am schwächsten, wenn sie ein gerades Vielfaches ist. Im ersteren Falle, also beim Maximum der Resonanz, verhalten sich die Amplituden in den Schwingungsbäuchen zur Amplitude der schwingenden Schlussplatte der Röhre, wie das durch $2\pi \cos k\alpha$ dividirte Quadrat der Wellenlänge zum Querschnitt der Röhre. Bei Röhren mit wenig verengter Mündung ist $\cos k\alpha$ nicht merklich von 1 unterschieden, die Grösse [10] des Maximums der Resonanz also von der Form der Mündung ziemlich unabhängig, und die Stärke des Schalls im freien Raume ist bei solchen Röhren sowohl vom Querschnitt als von der Form der Mündung unabhängig. Bei stark verengter Mündung steigt die Resonanz

in der Röhre und auch die Stärke des Schalls im freien Raume. Bei stärkster Resonanz ist die Phase der Bewegung in den Schwingungsbäuchen von den entsprechenden Phasen der mitgetheilten Bewegung der Zeit nach um eine Viertel-Schwingungsdauer verschieden.

Aehnliche Ergebnisse finden sich, wenn der Schall in der Röhre von einem in den entfernteren Theilen des freien Raumes befindlichen tönenden Punkte erregt wird, und für eine jede beliebige Lage des tönenden Punktes im freien Raume vor der Mündung der Röhre lässt sich durch das unter Nr. 3 als Folgerung des *Green*'schen Theorems oben aufgeführte Reciprocitätsgesetz wenigstens das Verhältniss der Stärke der Resonanz für verschiedene Röhrenlängen angeben. Auch in diesem allgemeinsten Falle findet sich, dass die Resonanz der einerseits geschlossenen Röhre am stärksten ist, wenn ihre reducirte Länge ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist.

Auf offene Röhren, deren beide Mündungen denselben Bedingungen unterliegen, wie die eine Mündung der bisher betrachteten Röhren, lassen sich die Resultate leicht übertragen. Ihre Resonanz ist am stärksten, wenn ihre reducirte Länge gleich einem Vielfachen der halben Wellenlänge ist.

In § 8 werden Röhren betrachtet, welche Rotationskörper sind, und die Methoden aufgesucht, um Formen der Mündung zu finden, für welche die Bewegung der Luft vollständig angegeben werden kann.

In § 9 werden die Rechnungen für die einfachsten Formen der Functionen, welche die Form der Mündung bestimmen, durchgeführt. Unter diesen Formen kommt eine vor, bei welcher die Differenz zwischen reducirter und wahrer Länge verschwindet. Ihre Mündung ist schwach trompetenförmig erweitert, so dass die Fläche der Mündung doppelt so gross ist als der Querschnitt des Cylinders. Eine andere dieser Formen, bei welcher die Weite der Oeffnung gleich der des Cylinders ist, weicht so ausserordentlich wenig von einem vollständigen Cylinder ab, dass man für die meisten praktischen Anwendungen die Differenz wird vernachlässigen dürfen. Der Abstand ihrer Wandung von der eines reinen Cylinders ist berechnet und in einer Tabelle zusammengestellt; mehr als $\frac{1}{100}$ des Radius beträgt diese Abweichung nur auf einem Streifen dicht an der Mündung, dessen Breite 0,54 des Radius beträgt, [11] und die grösste Abweichung, die überhaupt

vorkommt, ist $\frac{1}{50}$ des Radius. Die Differenz zwischen der reducirten und wahren Länge dieser Röhre beträgt $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$ des Radius. Die eines vollständigen Cylinders muss ein wenig grösser sein. Die neuesten und sorgfältigsten experimentellen Bestimmungen der Grösse dieser Differenz von *Wertheim* *) und *Zamminer* **) zeigen noch keine sehr grosse Uebereinstimmung unter einander, was vielleicht darin seinen Grund hat, dass die Röhren durch Anblasen zum Tönen gebracht sind, wobei man zwar, wie die Erfahrung lehrt, im Allgemeinen Töne derselben Höhe bekommt, wie die Töne der stärksten Resonanz der Röhre, aber doch nicht genau weiss, wie weit die Tonhöhe durch kleine Modificationen des Anblasens verändert werden kann. Auch ist die Länge der Schallwellen nur schwer so genau zu bestimmen, dass auch die verhältnissmässig kleine Differenz der wahren und reducirten Länge der Röhren genau gefunden wird. *Wertheim* findet den Werth dieser Differenz, wenn sie in Theilen des Radius ausgedrückt wird, ziemlich unabhängig von dem Verhältniss des Durchmessers zur Wellenlänge, und zwar bei beiderseits offenen Röhren für jedes Ende zwischen 0,560 und 0,819, Mittel 0,663 R, für einerseits gedeckte Röhren zwischen 0,638 und 0,862, Mittel 0,746 R, so dass der theoretisch gefundene Werth 0,785 R zwar grösser ist als seine Mittelwerthe, aber doch noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsdifferenzen liegt. *Zamminer* findet dagegen einen stärkeren Einfluss der Tonhöhe. Bei offenen Röhren variirt der Werth der Differenz von 0,848 bis 0,493 R, während die Viertelwellenlänge von 20,9 R auf 3,9 R sich ändert, und bei geschlossenen Röhren variirt die Differenz zwischen 1,304 und 0,376 R, während die Viertelwellenlänge von 40,1 R auf 7,03 R sinkt. Dies stimmt nicht so gut mit der Theorie, welche so starke Aenderungen des Werthes 0,785 R, der für die tiefsten Töne gilt, bei veränderter Tonhöhe nicht erwarten lässt.[3]) Indessen sind bei den Röhren, deren Länge mehr als 30 R beträgt, auch hier die Differenzen so gering, dass Aenderungen der Schwingungszahl um ein Procent genügen würden, die Uebereinstimmung herzustellen, und bei verschie-

---

*) Annales de Chimie et de Physique, Sér. 3, Tome XXXI, p. 394.
**) *Poggendorff*'s Annalen der Physik XCVII, p. 183.

dener Stärke des Anblasens können leicht viel grössere Aenderungen eingetreten sein.

Endlich ist in § 10 noch eine Aufgabe in ihren allgemeinen Zügen behandelt, welche bisher der theoretischen Bearbeitung unzugänglich gewesen [12] war, nämlich die Bestimmung der Luftschwingungen in solchen Hohlräumen, deren drei Dimensionen gleichmässig als verschwindend klein gegen die Wellenlänge betrachtet werden können, und die durch eine Oeffnung, deren Fläche selbst gegen die Oberfläche des Hohlraums verschwindend klein ist, mit der äusseren Luft communiciren. Es lässt sich die Höhe der Töne, für welche solche kugel- und flaschenförmige Pfeifen stärkste Resonanz geben, allgemein bestimmen. Ist die Oeffnung kreisförmig, und ihr Flächeninhalt s, das Volumen des Hohlkörpers S, die Schallgeschwindigkeit a, und die Schwingungszahl des Tones n, so ist nach der Theorie

$$n = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi^5}} \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}.$$

Wählen wir als Längeneinheit das Millimeter, und setzen $a = 332\,260$, so ist

$$n = 56174 \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}.$$

Sondhauss *) hat aus Versuchen die Schwingungszahl der durch Anblasen solcher Hohlkörper erhaltenen Töne in die Formel gebracht:

$$n = 52400 \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}.$$

Noch besser stimmt die Theorie mit den Versuchen von *Wertheim*, bei welchen das Verhältniss der Fläche der Oeffnung zur Oberfläche des Hohlraums noch kleiner ist, als bei *Sondhauss*, und die Uebereinstimmung ist desto grösser, je kleiner jenes Verhältniss ist.

Für elliptische Oeffnungen lässt sich der Werth von n ebenfalls bestimmen. Er wird etwas grösser als für kreisförmige [3a]).

---

*) *Poggendorff*'s Annalen LXXXI, S. 235 und 347. Es ist übrigens in diesem Aufsatze die Bezeichnungsweise der französischen Physiker gebraucht, wonach die Schwingungszahlen der Töne doppelt so gross werden als nach der deutschen Bezeichnung.

Auch für Hohlkörper mit zwei Oeffnungen lässt sich dieselbe Aufgabe lösen; das theoretische Gesetz stimmt auch hier mit den empirischen Formeln von *Sondhauss* und seinen Versuchen überein.

§ 1.

Die Gleichungen der Luftbewegung.

Es sei innerhalb einer Luftmasse in dem Punkte, der durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt ist, zur Zeit t der Druck gleich p, die den drei Coordinatenaxen parallelen Componenten der Geschwindigkeit u, v, w, die Dichtigkeit h, und die Componenten der auf die Einheit der gasigen [13] Masse wirkenden äusseren Kräfte X, Y und Z seien auszudrücken als Differentialquotienten einer Potentialfunction P, so dass

$$X = \frac{dP}{dx}, \quad Y = \frac{dP}{dy}, \quad Z = \frac{dP}{dz}.$$

Die bekannten Bewegungsgleichungen für die inneren Punkte der Luftmasse sind demgemäss [4]):

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dP}{dx} - \frac{1}{h} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}, \\ \frac{dP}{dy} - \frac{1}{h} \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}, \\ \frac{dP}{dz} - \frac{1}{h} \cdot \frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}, \\ \qquad -\frac{dh}{dt} = \frac{d(hu)}{dx} + \frac{d(hv)}{dy} + \frac{d(hw)}{dz}. \end{cases}$$

Wenn Luft, ohne Wärme abzugeben, ihre Dichtigkeit ändert, ist

$$(1^a) \qquad p = b^2 h^\nu,$$

wo b eine Constante und $\nu = 1{,}42$ ist. Daraus folgt:

$$(1^b) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dx} = b^2 \nu h^{\nu-1} \frac{dh}{dx} \quad \text{und} \\ \frac{1}{h}\frac{dp}{dx} = b^2 \nu h^{\nu-2} \frac{dh}{dx} = \frac{b^2\nu}{\nu-1} \frac{d(h^{\nu-1})}{dx}, \end{cases}$$

und ähnlich für die Differentialquotienten nach y und z.

Die Schallbewegung gehört zu denjenigen Bewegungen, denen ein Geschwindigkeitspotential[1]) zukommt, welches mit Φ bezeichnet werde, so dass wir haben:

$$(1^c) \qquad u = \frac{d\Phi}{dx}, \qquad v = \frac{d\Phi}{dy}, \qquad w = \frac{d\Phi}{dz}.$$

Setzt man die Werthe aus (1^b) und (1^c) in die Gleichungen (1), so haben die drei ersten derselben eine gemeinschaftliche Integralgleichung, nämlich:

$$(1^d) \qquad P - \frac{b^2\nu}{\nu-1}(h^{\nu-1} - h_0^{\nu-1}) = \frac{d\Phi}{dt} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2\right\},$$

wo h_0 eine Function der Zeit sein kann, und die vierte Gleichung lässt sich auf die Form bringen:

$$(1^e) \qquad 0 = \frac{d(h^{\nu-1})}{dt} + (\nu-1)h^{\nu-1}\left[\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}\right] + \frac{d\Phi}{dx}\cdot\frac{dh^{\nu-1}}{dx} + \frac{d\Phi}{dy}\cdot\frac{dh^{\nu-1}}{dy} + \frac{d\Phi}{dz}\cdot\frac{dh^{\nu-1}}{dz}.$$

[14] In dem Folgenden nehmen wir an, dass die Geschwindigkeiten und Aenderungen der Dichtigkeit verschwindend klein seien. Setzen wir[5])

$$h = h_0(1 + \mathfrak{h}),$$

so betrachten wir also P, $\mathfrak{h}$, sämmtliche Differentialquotienten von $\mathfrak{h}$, P und Φ als unendlich kleine Grössen, und vernachlässigen ihre höheren Potenzen. Dann werden die beiden Gleichungen (1^d) und (1^e), indem man $b^2\nu h_0^{\nu-1} = a^2$ setzt,

$$(1^f) \qquad P - a^2\mathfrak{h} = \frac{d\Phi}{dt},$$

$$(1^g) \qquad 0 = \frac{d\mathfrak{h}}{dt} + \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}.$$

Indem man die erste Gleichung nach t differentiirt, kann man $\mathfrak{h}$ aus beiden eliminiren*) und erhält:

*) Ich bemerke hier noch, dass diese Elimination von h auch an den unverkürzten Gleichungen (1^d) und (1^e) vollzogen werden kann, und dass man die Eliminationsgleichung, welche von der

$$(2)\qquad 0=\frac{dP}{dt}-\frac{d^2\Phi}{dt^2}+a^2\left[\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\frac{d^2\Phi}{dy^2}+\frac{d^2\Phi}{dz^2}\right].$$

Wir wollen im Folgenden nur Fälle behandeln, wo wir es mit einem einzigen gleichmässig anhaltenden Tone von n Schwingungen in der Zeiteinheit zu thun haben, und also Φ von der Form ist:

$$(2^a)\qquad \Phi=\Psi'\cos(2\pi nt)+\Psi''\sin(2\pi nt),$$

wo Ψ' und Ψ'' Functionen von x, y, z sind. Dabei kann die Gleichung (2) nur bestehen, wenn auch P von der Form ist[6]):

$$(2^b)\qquad \frac{n}{2a^2}P=-q''\cos(2\pi nt)+q'\sin(2\pi nt).$$

Es zerfällt dann die Gleichung (2) in die folgenden beiden:

$$(3)\qquad \begin{cases} 0=4\pi q'+k^2\Psi'+\dfrac{d^2\Psi'}{dx^2}+\dfrac{d^2\Psi'}{dy^2}+\dfrac{d^2\Psi'}{dz^2}, \\ 0=4\pi q''+k^2\Psi''+\dfrac{d^2\Psi''}{dx^2}+\dfrac{d^2\Psi''}{dy^2}+\dfrac{d^2\Psi''}{dz^2}, \end{cases}$$

wo

$$(3^a)\qquad k=\frac{2\pi n}{a}=\frac{2\pi}{\lambda},$$

und λ die Wellenlänge ist.

[**15**] Zunächst werden wir uns mit der Integration dieser Differentialgleichungen zu beschäftigen haben. Aus ihrer Ableitung geht hervor, dass q' und q'' Functionen der Coordinaten sind, welche sich nur an solchen Stellen des Raumes von 0 unterscheiden, wo veränderliche Kräfte auf die Luftmasse einwirken und Schallschwingungen erregen. In allen anderen Theilen der Luftmasse sind q' und $q''=0$, und es sind daher die Functionen Ψ der Bedingung unterworfen:

$$(3^b)\qquad 0=k^2\Psi+\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}.$$

---

dritten Dimension in Bezug auf Φ und seine Differentialquotienten ist, ebenfalls mit Hülfe der hier folgenden Theoreme durch eine nach Sinus und Cosinus der Zeit fortlaufende Reihe integriren kann, deren Glieder von n^{ter} Dimension der kleinen Grössen den Combinationstönen n^{ter} Ordnung der primär angegebenen Töne entsprechen.

Ich werde im Folgenden den immer wiederkehrenden Ausdruck

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}$$

nach dem Vorgang von *Green* mit $\nabla_x\Phi$ oder, wo es unzweideutig ist, mit $\nabla\Phi$ bezeichnen.

§ 2.

Integration der Wellengleichung.

Wir beginnen mit der Integration der einfacheren Gleichung

$$(3^b) \qquad 0 = k^2\Psi + \nabla_x\Psi .$$

Ein bekanntes particulares Integral derselben ist

$$(4) \qquad \Psi = \frac{A\cos(kr+g)}{r},$$

wenn wir mit A und g Constanten bezeichnen, mit r aber die Entfernung des Punktes x, y, z von einem festen Punkte α, β, γ, also

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 .$$

Es ist nämlich

$$(4^a) \qquad \frac{d\Psi}{dx} = -\frac{A(x-\alpha)}{r^3}\left[\cos(kr+g) + kr\sin(kr+g)\right],$$

$$(4^b)\begin{cases} \dfrac{d^2\Psi}{dx^2} = -A\left[\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3(x-\alpha)^2}{r^5}\right]\left[\cos(kr+g)+kr\sin(kr+g)\right] \\ \qquad\qquad - \dfrac{Ak^2(x-\alpha)^2}{r^3}\cos(kr+g), \\ \dfrac{d^2\Psi}{dy^2} = -A\left[\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3(y-\beta)^2}{r^5}\right]\left[\cos(kr+g)+kr\sin(kr+g)\right] \\ \qquad\qquad - \dfrac{Ak^2(y-\beta)^2}{r^3}\cos(kr+g), \\ \dfrac{d^2\Psi}{dz^2} = -A\left[\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3(z-\gamma)^2}{r^5}\right]\left[\cos(kr+g)+kr\sin(kr+g)\right] \\ \qquad\qquad - \dfrac{Ak^2(z-\gamma)^2}{r^3}\cos(kr+g). \end{cases}$$

[16] Wenn man die drei Gleichungen (4^b) addirt, so erhält man

$$\nabla_x \Psi = -A k^2 \frac{\cos(kr+g)}{r} = -k^2 \Psi ,$$

vorausgesetzt, dass nicht $r = 0$ und dabei die Werthe von $\frac{d^2 \Psi}{dx^2}$, $\frac{d^2 \Psi}{dy^2}$, $\frac{d^2 \Psi}{dz^2}$ und Ψ unendlich werden. Mit Ausnahme des Punktes α, β, γ ist also dann die Differentialgleichung (3^b) mittelst des in Gleichung (4) angenommenen Werthes von Ψ 7) durch den ganzen unendlichen Raum erfüllt.

Indem wir in Gleichung (4) g entweder gleich Null oder gleich $-\frac{1}{2}\pi$ machen, erhalten wir zwei verschiedene Formen des particularen Integrals.

1) Wenn $g = -\frac{1}{2}\pi$, wird

$$(4^c) \qquad \Psi = A \frac{\sin kr}{r} ,$$

und erhält für $r = 0$ den endlichen Werth Ak. Auch die Differentialquotienten bleiben endlich, es wird nämlich für $r = 0$:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = \frac{d^2 \Psi}{dy^2} = \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = -\tfrac{1}{3} A k^3 ,$$

wie man leicht sieht, wenn man $\cos kr$ und $\sin kr$ nach Potenzen der verschwindenden Grösse r entwickelt. Daraus ergiebt sich für $r = 0$:

$$\nabla_x \Psi + k^2 \Psi = 0 .$$

Die Function $\Psi = A \frac{\sin kr}{r}$ ist also ein solches particulares Integral der Gleichung (3^b), welches im ganzen Raume und auch im Punkte α, β, γ gültig ist.

2) Wenn wir $g = 0$ setzen, wird

$$(4^d) \qquad \Psi = A \frac{\cos kr}{r}$$

und für $r = 0$ unendlich gross, ebenso wie seine Differentialquotienten. Die Gleichung (3^b) wird also im ganzen Raume erfüllt, mit Ausnahme des Punktes α, β, γ.

Daraus ergiebt sich ferner leicht, dass, wenn wir setzen:

$$(4^e) \qquad \Psi = \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma} \left[A_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\sin kr}{r} \right],$$

wo bei den einzelnen Gliedern der Summe die Werthe von α, β, γ und A verschieden sind, die Gleichung (3^b) erfüllt ist im ganzen Raume, ohne Ausnahme der Punkte α, β, γ.

[17] Wenn wir aber setzen

$$(4^f) \qquad \Psi = \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}\left[A_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\cos kr}{r}\right],$$

so ist die Gleichung (3^b) im ganzen Raume erfüllt mit Ausnahme derjenigen Punkte, deren Coordinaten α, β, γ in der Summe vorkommen.

Denken wir uns die Punkte α, β, γ continuirlich neben einander im Raume vertheilt, so werden aus den Summen Integrale, und wir schliessen, dass die Function

$$(4^g) \qquad \Psi = \iiint h_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\sin kr}{r}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma$$

im ganzen Raume der Gleichung (3^b) genügt, dagegen die Function

$$(4^h) \qquad \Psi = \iiint h_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\cos kr}{r}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma$$

nur in denjenigen Theilen des Raumes, für welche $h = 0$. In beiden soll h eine willkürliche Function von α, β und γ bedeuten.

Wenn wir in der Gleichung (3^b) $k = 0$ setzen, verwandelt sie sich in

$$(3^c) \qquad \nabla_x \Psi = 0,$$

die bekannte Differentialgleichung für die Potentialfunctionen solcher Massen, welche in die Ferne mit anziehenden oder abstossenden Kräften wirken, deren Intensität dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Die verschiedenen Formen für das Integral Ψ der Gleichung (3^b), welche wir aufgestellt haben, verwandeln sich, wenn sie $\frac{\sin kr}{r}$ enthalten, in

$\Psi =$ Constans [7a]),

welches Integral im ganzen Raume ohne Ausnahme eines Punktes der Gleichung (3^c) genügt, oder, wenn sie $\frac{\cos kr}{r}$ enthalten, in

$$\Psi = \Sigma\left[\frac{A}{r}\right]$$

oder

$$\Psi = \iiint \frac{h}{r} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma ,$$

welche beiden Formen in denjenigen Punkten des Raumes nicht genügen, in denen anziehende oder abstossende Masse vorhanden ist, in denen also A oder h nicht gleich Null ist[8]).

Da die Gleichung

$$0 = k^2 \Psi + \nabla_x \Psi$$

[18] im ganzen mit Luft gefüllten Raume erfüllt sein muss mit Ausnahme solcher Stellen, wo veränderliche Kräfte auf die Luft wirken, schliessen wir, dass in den Formen des Integrals (4^d), (4^f), (4^h) diejenigen Punkte und Theile des Raumes, in denen die Gleichung (3^b) nicht erfüllt ist, Erregungspunkte des Schalls sind. Wir wollen sie auch als solche bezeichnen. Es mag in den Formen des Integrals (4^d) und (4^f) die Constante A die Intensität des betreffenden Erregungspunktes heissen, und in (4^h), wo die Erregungspunkte continuirlich durch den Raum vertheilt gedacht sind, nennen wir die Constante h ihre Dichtigkeit. Bei elektrischen Problemen, wo $k = 0$, würden die Erregungspunkte den Massenpunkten, die Intensität der Masse, die Dichtigkeit der Dichtigkeit entsprechen. Da die Functionen Ψ die Bedeutung von Geschwindigkeitspotentialen haben, wollen wir, entsprechend dem Sprachgebrauch in der Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus, eine solche Summe wie (4^f), welche sich auf eine bestimmte Zahl von Punkten α, β, γ bezieht, das Geschwindigkeitspotential dieser bestimmten Erregungspunkte nennen. Die Gleichung (3^b) wird also erfüllt durch die ganze Ausdehnung eines gegebenen Raumes S, wenn Ψ das Geschwindigkeitspotential ausserhalb S gelegener Erregungspunkte ist.

§ 3.

Gesetz der Raumdichtigkeit.

Wenn wir nun zur Betrachtung der Differentialgleichung

$$(3) \qquad \nabla_x \Psi + k^2 \Psi = -4\pi q$$

übergehen, so ist zunächst zu bemerken, dass für $k = 0$ diese Gleichung in

$$(3^d) \qquad \nabla_x \Psi = -4\pi q$$

übergeht, deren Integral bekanntlich ist[8]):

$$\Psi = \iiint \frac{q_{\alpha,\beta,\gamma}}{r} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma + \Phi ,$$

wo Φ eine Function bezeichnet, für welche in dem ganzen Theile des Raumes, wo die Gleichung (3^d) erfüllt sein soll, $\nabla \Phi = 0$ ist.

Wir wollen jetzt zeigen, dass in ganz analoger Weise das Integral der Gleichung

$$(3) \qquad \nabla_x \Psi + k^2 \Psi = -4\pi q$$

ist:

$$(5) \qquad \Psi = \iiint q_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\cos kr}{r} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma + \Phi ,$$

wo Φ eine Function bezeichnet, für welche in den Theilen des Raumes, wo [19] die Gleichung (3) [8a]) gültig sein soll,

$$\nabla_x \Phi + k^2 \Phi = 0 .$$

Um die durch das Zeichen $\nabla_x \Psi$ vorgeschriebenen Differentiationen unter dem Integralzeichen in (5) vornehmen zu können, denke ich mir den ganzen Raum durch eine den Punkt x, y, z in unendlich kleiner Entfernung umgebende, rings geschlossene Fläche getheilt, und nenne den unendlich kleinen inneren Raum S_0, den umgebenden äusseren S_1. Das in dem Werthe von Ψ (Gleichung (5)) enthaltene Integral zerlege ich dem entsprechend in zwei Theile, von denen der eine Ψ_0 der Integration über S_0, der andere Ψ_1 der über S_1 entspricht.

Es ist also

$$(5^a) \qquad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Phi .$$

Da Ψ_1 ein Potential von Erregungspunkten, die ausserhalb S_0 liegen, für einen innerhalb S_0 enthaltenen Punkt ist, so ist

$$\nabla_x \Psi_1 + k^2 \Psi_1 = 0 ,$$

ebenso

$$\nabla_x \Phi + k^2 \Phi = 0 ,$$

also

$$(5^b) \qquad \nabla_x \Psi + k^2 \Psi = \nabla_x \Psi_0 + k^2 \Psi_0 .$$

Nun setze ich

$$f_r = \frac{\cos kr}{r} - \frac{1}{r} ,$$

welche Grösse f_r für $r = 0$ auch gleich Null wird, während

aus den Gleichungen (4^b) sich ergiebt, dass für sehr kleine Werthe von r $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $\frac{d^2 f}{dy^2}$ und $\frac{d^2 f}{dz^2}$ sich auf Grössen von der Dimension $\frac{1}{r}$ reduciren[9]), und für $r = 0$

$$\nabla_x f_r = -\frac{k^2}{r}$$

wird. Ferner setze ich

$$\Psi' = \iiint q_{\alpha,\beta,\gamma} f_r \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma ,$$

$$\Psi'' = \iiint q_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{1}{r} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma ,$$

beide Integrale über den unendlich kleinen Raum S_0 ausgedehnt, so dass

$$(5^c) \qquad \Psi_0 = \Psi' + \Psi'' .$$

Um zu ermitteln, von welcher Grössenordnung Ψ', Ψ'' und $\nabla \Psi'$ sind, führe [20] man statt der rechtwinkligen Coordinaten α, β und γ Kugelcoordinaten ein, indem man setzt[9a]):

$$\alpha - x = r \cos \omega ,$$
$$\beta - y = r \sin \omega \cos \vartheta ,$$
$$\gamma - z = r \sin \omega \sin \vartheta ,$$

dann wird

$$d\alpha \, d\beta \, d\gamma = r^2 \sin \omega \, d\omega \, d\vartheta \, dr .$$

Ist also die mit $d\alpha \, d\beta \, d\gamma$ unter dem Integrationszeichen multiplicirte Grösse für $r = 0$ entweder endlich, wie $q f_r$, oder von der Ordnung $\frac{1}{r}$, wie $\frac{q}{r}$ und $\nabla_x f_r$, welches gleich $-\frac{k^2}{r}$ ist, so wird die zu integrirende Grösse unendlich klein und über einen unendlich kleinen Raum integrirt[10]). Daher werden die Grössen Ψ', Ψ'', Ψ_0 (wegen (5^c)) und $\nabla_x \Psi'$ unendlich klein. Dagegen ist $\nabla_x \Psi''$ endlich und hat den bekannten Werth:

$$\nabla_x \Psi'' = -4\pi q .$$

Folglich wird aus (5^b) und (5^c):

$$\nabla_x \Psi + k^2 \Psi = \nabla_x \Psi' + \nabla_x \Psi'' + k^2 \Psi' + k^2 \Psi''$$

und, indem wir die unendlich kleinen Grössen gegen die endliche vernachlässigen,

$$(3) \qquad \nabla_x \Psi + k^2 \Psi = -4\pi q,$$

was zu erweisen war.

§ 4.

Gesetz der Flächendichtigkeit[11]). — Analogon des Satzes von Green.

Es lässt sich für die hier untersuchten Formen von Geschwindigkeitspotentialen ferner dieselbe Relation erweisen, welche für die Potentialfunctionen elektrischer Massen an solchen Flächen stattfindet, die mit endlichen Massen in unendlich dünner Schicht belegt sind.

Setzen wir

$$(6) \qquad \Psi = \int p \frac{\cos kr}{r} d\omega,$$

wo $d\omega$ das Flächenelement einer beliebigen Fläche Ω bezeichnet und p eine Function, die sich in der Fläche continuirlich ändert, und untersuchen die ersten Differentialquotienten von Ψ für solche Punkte x, y, z des Raumes, welche der Fläche Ω unendlich nahe liegen.

[21] Wir setzen wieder:

$$\frac{\cos kr}{r} = f_r + \frac{1}{r},$$

$$\Psi = \Psi' + \Psi'',$$

$$\Psi' = \int p f_r d\omega,$$

$$\Psi'' = \int p \frac{1}{r} d\omega.$$

Ψ' ist jedenfalls endlich, wenn p und die Grösse der Fläche Ω endlich sind, da f_r immer endlich ist. Dass Ψ'' unter denselben Bedingungen endlich ist, ist aus der Theorie der elektrischen Potentialfunctionen bekannt, ebenso dass Ψ'' auf beiden Seiten dicht an der Fläche dieselben Werthe hat. Dass letzteres auch mit Ψ' und also auch mit Ψ der Fall sei, ist leicht zu ersehen, da f_r, auch wenn man durch die Schicht selbst hindurchgeht, sich immer nur continuirlich ändern kann. Dagegen wissen wir, dass die Differentialquotienten von Ψ''

an der Fläche einen endlichen Sprung ihres Werthes erleiden, während leicht zu erkennen ist, dass die von Ψ' an der Fläche continuirlich sein müssen. Denken wir uns durch eine geschlossene Linie, die in unendlich kleiner Entfernung den Fusspunkt des von x, y, z auf die Fläche Ω gefällten Lothes umgiebt, ein Stück Ω_0 aus der Fläche herausgeschnitten und das Integral $\int p f_r d\omega$ getheilt in Ψ_0', welches über die Fläche Ω_0, und Ψ_1', welches über den Rest der Fläche ausgedehnt ist, so dass

$$\Psi' = \Psi_0' + \Psi_1'.$$

Nun ist die Grösse

$$\frac{df_r}{dx} = -\frac{k^2}{2}\frac{x-\alpha}{r}$$

für unendlich kleine Werthe von r, bleibt also endlich, macht aber einen Sprung, wenn man von positiven Werthen von $x-\alpha$ durch $r=0$ nach negativen übergeht[12]), ist dagegen continuirlich, wenn man nicht durch $r=0$ hindurchgeht. Letzteres geschieht nun keinenfalls, wenn man in Ψ_1' die Werthe von x, y, z sich ändern lässt. Dagegen ist $\frac{d\Psi_0'}{dx}$, wo allerdings ein Sprung eintreten würde, unendlich klein als das Integral einer endlichen Grösse, über eine unendlich kleine Fläche genommen, und wir können deshalb seinen Werth gegen $\frac{d\Psi_1'}{dx}$ und $\frac{d\Psi''}{dx}$ vernachlässigen. Folglich sind die Differentialquotienten von Ψ', welches gleich $\Psi_0' + \Psi_1'$ ist, continuirlich, und die von Ψ müssen an [22] der Fläche Ω einen Sprung von derselben Grösse wie die von Ψ'' machen. Bezeichnen wir die von der Fläche ab nach beiden Seiten hingehenden Normalen mit $n_{,}$ und $n_{,,}$, so ist bekanntlich

$$\frac{d\Psi''}{dn_{,}} + \frac{d\Psi''}{dn_{,,}} = -4\pi p\,,$$

und daraus folgt, dass auch

$$(6^a)\qquad \frac{d\Psi}{dn_{,}} + \frac{d\Psi}{dn_{,,}} = -4\pi p$$

sei, was zu beweisen war.

Man kann ferner den für die Lehre von den elektrischen und magnetischen Potentialfunctionen so äusserst fruchtbaren Lehrsatz von *Green* *) auch auf die hier vorliegenden Functionen mit dem grössten Vortheil anwenden.

Wenn Ψ und Φ zwei Functionen sind, welche innerhalb eines abgegrenzten Raumes S eindeutig und stetig sind, d. h. überall endliche erste Differentialquotienten haben, so ist nach jenem Satze von *Green*[13]):

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega + \iiint \Psi \nabla \Phi \, dx\, dy\, dz = \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega + \iiint \Phi \nabla \Psi \, dx\, dy\, dz,$$

wo $d\omega$ ein Flächenelement der Oberfläche von S, n die nach innen gerichtete Normale bedeutet, und die Integrationen nach $d\omega$ über die ganze Oberfläche von S, die nach $dx\,dy\,dz$ durch das ganze Innere von S auszudehnen sind. Wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung addiren $k^2 \iiint \Psi\Phi \, dx\, dy\, dz$, so bringen wir den Satz in die Form, welche wir hier brauchen:

$$(7) \quad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega + \iiint \Psi (\nabla \Phi + k^2 \Phi) \, dx\, dy\, dz = \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega + \iiint \Phi (\nabla \Psi + k^2 \Psi) \, dx\, dy\, dz.$$

Sind Ψ und Φ dargestellt als Geschwindigkeitspotentiale von Erregungspunkten, die theils innerhalb, theils ausserhalb des Raumes S continuirlich mit der Dichtigkeit q und p verbreitet sind, so ist nach Gleichung (3) und (7):

$$(7^a) \quad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - 4\pi \iiint \Psi p \, dx\, dy\, dz = \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega - 4\pi \iiint \Phi q \, dx\, dy\, dz.$$

[23] Sind Ψ und Φ Geschwindigkeitspotentiale von ausserhalb S gelegenen Erregungspunkten, so wird:

---

*) *Crelle's* Journal Bd. 44, S. 360.

$$(7^b) \quad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega = \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega .$$

Green hat bewiesen, dass eine solche Gleichung wie (7^a) auch richtig bleibt, wenn in einem unendlich kleinen Raumelement ds des Raumes S die Dichtigkeit p einen so grossen constanten Werth annimmt, dass $p\,ds$ einer endlichen Grösse A gleich wird, obgleich dann Φ an dieser Stelle nicht stetig bleibt, sondern unstetig wird, wie $\frac{A}{r}$. Nehmen wir an, dass Φ das Geschwindigkeitspotential der in dem unendlich kleinen Raumelemente ds, dessen Coordinaten α, β, γ seien, mit der gleichmässigen Dichtigkeit p vertheilten Erregungspunkte sei, während p überall sonst gleich Null ist, so dass also Φ in endlicher Entfernung vom Punkte α, β, γ den Werth habe:

$$\Phi = A \frac{\cos kr}{r},$$

so reducirt sich das dreifache Integral der linken Seite der Gleichung (7^a), indem wir den Werth, welchen Ψ im Punkte α, β, γ hat, mit Ψ_α bezeichnen, auf[14])

$$\Psi_\alpha \int p\,ds = A \Psi_\alpha .$$

Die Gleichung (7) wird also:

$$(7^c) \quad -4\pi \Psi_\alpha = \int \frac{d\Psi}{dn} \frac{\cos kr}{r} d\omega - \int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega + \iiint (\nabla_x \Psi + k^2 \Psi) \frac{\cos kr}{r} dx\,dy\,dz .$$

Somit ist die Function Ψ, welche wir nur der Bedingung unterworfen hatten, eindeutig und stetig zu sein, die übrigens ganz beliebiger Art sein kann, auf die Form unserer Geschwindigkeitspotentiale gebracht. Ist übrigens innerhalb des ganzen Raumes S

$$\nabla_x \Psi + k^2 \Psi = 0 ,$$

so wird die Gleichung (7^c):

$$(7^d) \quad \int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega - \int \frac{d\Psi}{dn} \frac{\cos kr}{r} d\omega = 4\pi \Psi_\alpha .$$

Nun ist das Integral $\int \frac{d\Psi}{dn} \frac{\cos kr}{r} d\omega$ das Potential einer Schicht von Erregungspunkten, welche an der Oberfläche von S ausgebreitet ist und die Dichtigkeit $\frac{d\Psi}{dn}$ hat. Das andere Integral können wir aber betrachten als das [24] Potential einer Doppelschicht von Erregungspunkten, die derselben Fläche anliegen. Denken wir die eine Schicht mit der Dichtigkeit $-\frac{1}{\varepsilon}\Psi$ auf der äusseren Seite der Oberfläche von S in der unendlich kleinen Entfernung $\frac{1}{2}\varepsilon$ von dieser Oberfläche ausgebreitet, die andere mit der Dichtigkeit $+\frac{1}{\varepsilon}\Psi$ auf der inneren Seite der Oberfläche von S auch in der unendlich kleinen Entfernung $\frac{1}{2}\varepsilon$ von dieser Oberfläche entfernt, so wird das Potential dieser Schichten sein[15]: $\int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega$. Somit lässt sich jede stetige und eindeutige Function Ψ, welche in allen Theilen des Raumes S der Gleichung genügt:

$$\nabla \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

als Geschwindigkeitspotential von Erregungspunkten ausdrücken, die bloss längs der Oberfläche von S ausgebreitet sind.

Hier aber hört die Aehnlichkeit mit den elektrischen Potentialfunctionen auf, indem diese letzteren sich stets ausdrücken lassen als Potentialfunctionen einer einfachen Schicht von Elektricität an der Oberfläche des Raumes, was bei unseren Potentialen zwar im Allgemeinen auch der Fall ist, aber für eine unendlich grosse Zahl von bestimmten Werthen von k für eine jede gegebene geschlossene Oberfläche Ausnahmen erleidet. Es sind dies nämlich diejenigen Werthe von k, die den eigenen Tönen der eingeschlossenen Luftmasse entsprechen.

Man kann sich davon leicht an einem Beispiele überzeugen, indem man das Potential für eine gleichmässig und continuirlich mit Erregungspunkten belegte Kugelschale berechnet.[16]

Wenn sämmtliche Dimensionen des Raumes S sehr klein gegen die Wellenlänge sind, kann kr gegen 1 vernachlässigt

werden, so oft r die Entfernung zweier innerhalb S gelegener Punkte ist. Unter diesen Umständen wird die Gleichung (7^d):

$$4\pi\Psi_\alpha = \int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega - \int \frac{d\Psi}{dn} \frac{d\omega}{r}.$$

Bei dieser Weglassung unendlich kleiner Grössen wird also Ψ eine Function, welche der Gleichung $\nabla\Psi = 0$ im Raume S genügt, und es folgt daraus, dass man in Räumen, deren Dimensionen gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, statt der Functionen, die der Gleichung $\nabla\Psi + k^2\Psi = 0$ genügen, stets unendlich wenig davon unterschiedene Functionen finden kann, die der Gleichung $\nabla\Psi = 0$ genügen.

[25] Wendet man die Gleichung (7^d) auf theilweis zusammenstossende Räume $S_{,}$ und $S_{,,}$ an, indem man die Elemente ihrer nicht gemeinsamen Oberfläche mit $d\omega_{,}$ und $d\omega_{,,}$, die des gemeinsamen Stückes ihrer Oberfläche mit $d\omega_0$ bezeichnet, unter $n_{,}$ die nach dem Inneren von $S_{,}$, unter $n_{,,}$ die nach dem Inneren von $S_{,,}$ gerichteten Normalen dieser Flächenelemente versteht, so hat man,

wenn innerhalb $S_{,}$ $\nabla\Psi_{,} + k^2\Psi_{,} = 0$,
und innerhalb $S_{,,}$ $\nabla\Psi_{,,} + k^2\Psi_{,,} = 0$,

der Punkt α, β, γ, von dem die Entfernungen r gerechnet werden, aber innerhalb $S_{,}$ liegt, und wir unter dem Integralzeichen $[d\omega_{,} + d\omega_0]$ schreiben, wo die Integration über sämmtliche Elemente $d\omega_{,}$ und sämmtliche $d\omega_0$ ausgedehnt werden soll:

$$4\pi\Psi_{,\alpha} = \int \Psi_{,} \frac{d}{dn_{,}}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)[d\omega_{,} + d\omega_0] - \int \frac{d\Psi_{,}}{dn_{,}} \frac{\cos kr}{r} [d\omega_{,} + d\omega_0],$$

$$0 = \int \Psi_{,,} \frac{d}{dn_{,,}}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)[d\omega_{,,} + d\omega_0] - \int \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}} \frac{\cos kr}{r} [d\omega_{,,} + d\omega_0].$$

Wenn nun an der gemeinsamen Trennungsfläche beider Räume

$$\Psi_{,} = \Psi_{,,}, \quad \frac{d\Psi_{,}}{dn_{,}} = \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,}} = -\frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}}$$

ist, so giebt die Addition beider Gleichungen, da $dn_{,} = -dn_{,,}$:

$$4\pi\Psi_{,\alpha} = \int \Psi_{,} \frac{d}{dn_{,}}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega_{,} - \int \frac{d\Psi_{,}}{dn_{,}} \frac{\cos kr}{r} d\omega_{,}$$
$$+ \int \Psi_{,,} \frac{d}{dn_{,,}}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega_{,,} - \int \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}} \frac{\cos kr}{r} d\omega_{,,}.$$

Die Function $\Psi_{,}$ erscheint also hier als Potential von Punkten ausgedrückt, die an der nicht gemeinsamen Oberfläche der Räume $S_{,}$ und $S_{,,}$ liegen, während die Punkte der gemeinsamen Trennungsfläche ganz aus dem Integral verschwinden. Genau denselben Ausdruck erhält man aber für $\Psi_{,,}$, wenn man den Punkt α, β, γ in den Raum $S_{,,}$ verlegt. Es sind also in diesem Falle $\Psi_{,}$ und $\Psi_{,,}$ Potentiale derselben ausserhalb des gemeinsamen Raumes $S_{,}$ und $S_{,,}$ liegenden Erregungspunkte, und beide Functionen müssen continuirlich in einander übergehen.

Wenn wir also im Folgenden für das Geschwindigkeitspotential in verschiedenen Theilen eines zusammenhängenden Luftraumes verschiedene Ausdrücke $\Psi_{,}$ und $\Psi_{,,}$ werden wählen müssen, wird die Continuität an der Grenzfläche [26] hergestellt sein, wenn in allen Punkten derselben

$$\Psi_{,} = \Psi_{,,} \quad \text{und} \quad \frac{d\Psi_{,}}{dn_{,}} = \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,}} \quad \text{oder} \quad = -\frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}}.$$

§ 5.

Verhalten in unendlicher Entfernung.

Wir müssen noch die Grenzbedingungen aufstellen für solche unendlich entfernt gedachte Oberflächen, durch welche Schallwellen in den unendlichen Raum hinauslaufen, und jenseits welcher es keine Erregungspunkte mehr giebt. Wenn von einem einzelnen Punkte aus in der vorher unbewegten Luft eine Erschütterung ausgeht, so hat das Geschwindigkeitspotential bekanntlich[17]) die Form $\frac{1}{r} F(r - at)$, wo F eine willkürliche Function, a die Schallgeschwindigkeit, r die Entfernung vom Erregungspunkte α, β, γ bezeichnet. Soll F einer einfach periodischen Bewegung von n Perioden in der Secunde entsprechen, so müssen wir ihm die Form geben $\frac{1}{r} \cos [kr - 2\pi nt + c]$, wo $2\pi n = ak$, wie in (3^a) festgesetzt ist. Haben wir nun eine beliebige Anzahl Schall erregender Punkte in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten, so dass das Geschwindigkeitspotential Ψ von der Form wird:

$$(8) \qquad \Psi = \Sigma \left\{ A_{\mathfrak{a}} \frac{\cos [kr_{\mathfrak{a}} - 2\pi nt + g_{\mathfrak{a}}]}{r_{\mathfrak{a}}} \right\},$$

wo $r_{\mathfrak{a}}$ die Entfernung vom Punkte $\mathfrak{a}$, $A_{\mathfrak{a}}$ und $g_{\mathfrak{a}}$ Constanten bezeichnen, die für die verschiedenen Punkte verschieden sind, und setzen wir die Coordinaten x, y, z des Punktes, in dem die Schallbewegung bestimmt werden soll, gleich

$$\varrho \cos \omega\,, \quad \varrho \sin \omega \cos \vartheta\,, \quad \varrho \sin \omega \sin \vartheta\,,$$

für den Punkt $\mathfrak{a}$ aber gleich

$$\alpha_{\mathfrak{a}}\,, \qquad \beta_{\mathfrak{a}}\,, \qquad \gamma_{\mathfrak{a}}\,,$$

so ist

$$r = \sqrt{\varrho^2 - 2\varrho(\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega \cos \vartheta + \gamma \sin \omega \sin \vartheta) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\,,$$

und für unendlich grosse Werthe von ϱ wird

$$r = \varrho - \alpha \cos \omega - \beta \sin \omega \cos \vartheta - \gamma \sin \omega \sin \vartheta\,,$$

indem wir die weiteren Glieder vernachlässigen, welche ϱ im Nenner enthalten und deshalb unendlich klein werden. Danach wird nun der Werth von Ψ, wenn wir nur die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$ beibehalten:

[27] (8ª)
$$\Psi = \frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho} \Sigma \{A_{\mathfrak{a}} \cos [k(\alpha_{\mathfrak{a}} \cos \omega + \beta_{\mathfrak{a}} \sin \omega \cos \vartheta + \gamma_{\mathfrak{a}} \sin \omega \sin \vartheta) - g_{\mathfrak{a}}]\} + \frac{\sin(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho} \Sigma \{A_{\mathfrak{a}} \sin [k(\alpha_{\mathfrak{a}} \cos \omega + \beta_{\mathfrak{a}} \sin \omega \cos \vartheta + \gamma_{\mathfrak{a}} \sin \omega \sin \vartheta) - g_{\mathfrak{a}}]\}\,.$$

Die beiden Summen in diesem Ausdruck sind von ϱ unabhängig, dagegen Functionen von ω und ϑ. Wir können also schliesslich für unendlich grosse Werthe von ϱ Ψ auf die Form bringen:

(8ᵇ)
$$\Psi = \mathfrak{A} \frac{\cos [k\varrho - 2\pi n t + \mathfrak{c}]}{\varrho}\,,$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}$ Functionen von ω und ϑ sind.

Dieselbe Betrachtung lässt sich auch anwenden, wenn in der Nähe der Schall erregenden Punkte begrenzte feste Körper vorhanden sind in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten, insofern man an der Oberfläche dieser Körper periodisch wirkende Kräfte annehmen kann, welche die Bewegung der Lufttheilchen senkrecht gegen ihre Oberfläche zu vernichten im Stande sind[18]). Ist der Raum durch

irgend eine unendlich ausgedehnte Fläche nach einer Richtung begrenzt, so ist diese Betrachtung nicht unmittelbar anwendbar, weil man dann periodisch wirkende Kräfte an dieser Fläche bis in unendliche Entfernung hinaus haben würde. Wohl aber lässt sich einfach der Fall behandeln, wo der Raum durch eine unendliche Ebene begrenzt ist, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Man braucht sich zu den Erregungspunkten nur noch ihre Spiegelbilder hinter der Ebene hinzu zu denken, von beiden zusammen das Geschwindigkeitspotential zu nehmen, so erfüllt dies die Bedingung, dass an der Ebene $\frac{d\Psi}{dn} = 0$ sei [19]), und es lassen sich auf ein solches Geschwindigkeitspotential dieselben Betrachtungen anwenden, als wenn nur endliche feste Körper in der Nähe wären.

Unter diesen Umständen ist also die Grenzbedingung, welche für die unendlich entfernten Theile des freien Raumes aufzustellen ist, die, dass das Bewegungspotential Ψ dort die in Gleichung (8^b) angegebene Form habe.

Reciprocitätsgesetz. Setzen wir jetzt voraus, dass Ψ das Geschwindigkeitspotential eines Schallwellenzuges sei, der in dem Punkte a erregt wird, in dessen Nachbarschaft sich eine beliebige Anzahl fester begrenzter Körper befinden möge, so dass nur an dieser Stelle Ψ unendlich werde, wie

$$A \frac{\cos k r_a}{r_a} \cos(2\pi n t),$$

sonst überall endlich und stetig bleibe, und in der unendlich grossen Entfernung ϱ [28] von derselben Form wie in Gleichung (8^b) sei. Ausserdem möge an der Oberfläche der festen Körper die Gleichung $\frac{d\Psi}{dn} = 0$ stattfinden. Es sei ferner Φ das Geschwindigkeitspotential einer Schallbewegung, die im Punkte b erregt worden ist, so dass in unendlich kleiner Entfernung von b Φ unendlich wird, wie

$$\Phi = A \frac{\cos k r_b}{r_b} \cos(2\pi n t),$$

in unendlicher Entfernung ϱ dagegen

$$\Phi = \mathfrak{B} \frac{\cos[k\varrho - 2\pi n t + \mathfrak{b}]}{\varrho}$$

sei, wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{b}$ nach verschiedenen Richtungen vom Anfangspunkte der Coordinaten aus verschiedene Werthe haben; übrigens muss Φ wie Ψ überall sonst endlich sein, und an der Oberfläche der festen Körper $\frac{d\Phi}{dn} = 0$.

Wir wenden nun die Gleichung (7) auf einen Raum S an, der durch eine mit dem unendlich grossen Radius ϱ um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebene Kugelschale umschlossen ist, von welchem wir nur ausschliessen alle die Theile, welche durch die festen Körper eingenommen sind. Für die Integration an den Punkten a und b, wo Ψ und Φ unendlich gross werden, findet dieselbe Betrachtung wie bei Gleichung (7^c) statt. Wir erhalten[20]:

$$(9) \quad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega$$

$$= 4\pi A [\Psi_b \cos(2\pi n t) - \Phi_a \cos(2\pi n t)],$$

wo Ψ_b den Werth von Ψ im Punkte b, und Φ_a den von Φ im Punkte a bezeichnet. Die Integration nach $d\omega$ ist sowohl über die Oberflächen der vorhandenen festen Körper auszudehnen, an denen aber $\frac{d\Phi}{dn} = \frac{d\Psi}{dn} = 0$, so dass diese Theile wegfallen, als auch über die Oberfläche der Kugel. Hier wird nun[20a]:

$$\Psi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\Psi}{dn} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}k \sin(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})}{\varrho^2}.$$

Wenn wir nun bedenken, dass Ψ und Φ von der Form sein müssen:

$$\Psi = \Psi' \cos(2\pi n t) + \Psi'' \sin(2\pi n t),$$

$$\Phi = \Phi' \cos(2\pi n t) + \Phi'' \sin(2\pi n t),$$

wo Ψ', Φ', Ψ'' und Φ'' von der Zeit unabhängige Grössen sind, so wird

$$\Psi_b \cos(2\pi n t) - \Phi_a \cos(2\pi n t)$$

$$= \tfrac{1}{2}[\Psi'_b - \Phi'_a] + \tfrac{1}{2}[\Psi'_b - \Phi'_a] \cos(4\pi n t) + \tfrac{1}{2}[\Psi''_b - \Phi''_a] \sin(4\pi n t).$$

Da nun die Gleichung (9) für jeden Werth von t erfüllt sein muss, so muss [29] einzeln gleich sein:

$$\Psi'_b - \Phi'_a = 0\,,$$
$$\Psi''_b - \Phi''_a = 0\,,$$
$$\int \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} \sin(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})\, d\omega}{\varrho^2} = 0\,,$$

also auch

$$(9^a)\quad \Psi_b = \Psi'_b \cos(2\pi n t) + \Psi''_b \sin(2\pi n t)$$
$$= \Phi'_a \cos(2\pi n t) + \Phi''_a \sin(2\pi n t) = \Phi_a\,.$$

Daraus geht der wichtige Satz hervor: **Wenn in einem mit Luft gefüllten Raume, der theils von endlich ausgedehnten festen Körpern begrenzt, theils unbegrenzt ist, im Punkte a Schallwellen erregt werden, so ist das Geschwindigkeitspotential derselben in einem zweiten Punkte b ebenso gross, als es in a sein würde, wenn nicht in a, sondern in b Wellen von derselben Intensität erregt würden. Auch ist der Unterschied der Phasen des erregenden und erregten Punktes in beiden Fällen gleich.**[20b])

Aus der nach der Gleichung (8^b) gemachten Bemerkung geht hervor, dass dasselbe noch gilt, wenn der Raum von einer unendlichen Ebene theilweise begrenzt ist. Ist Φ das Geschwindigkeitspotential von Schallwellen, die eine grössere Zahl von Erregungspunkten $b_1, b_2, \ldots, b_m$ haben, also von der Form

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_m\,,$$

wo Φ_m das Potential der in b_m erregten Schallwellen ist, so wird

$$(9^b)\quad \Sigma[\Psi_{b_m}] = \Sigma[\Phi_{m,a}]\,.$$

In dem Falle, wo die durch Ψ dargestellte Schallbewegung nicht davon herrührt, dass ein tönender Punkt a sich im freien Raume befindet, sondern dass an irgend einem Oberflächenelemente der Begrenzung des Luftraumes, das wir mit da bezeichnen wollen, $\frac{d\Psi_a}{dn}$ nicht Null, sondern

$$\frac{d\Psi_a}{dn} = B \cos 2\pi n t$$

ist, so wird aus der Gleichung (9)[20]):

$$(9^c)\quad 4\pi A \Psi_b = -B \Phi_a\, da\,.$$

Dieser Satz kann dazu dienen, um in solchen Fällen, wo man die Schallbewegung der Luft vollständig nur für gewisse besondere Lagen des schallerregenden Punktes bestimmen kann, doch wenigstens für alle anderen Lagen eines oder beliebig vieler schallerregender Punkte die Erregung in [30] jenen ersten Stellen des Raumes zu bestimmen. Namentlich ist der Satz wichtig, wenn man die Schallbewegung für eine jede entfernte Lage des tönenden Punktes bestimmen kann, weil man dann rückwärts auch für jede andere Lage des tönenden Punktes die Fernwirkung bestimmen kann, auf die es bei den akustischen Versuchen meistens allein ankommt.

§ 6.

Wellen in offener Röhre.

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über, die Bewegung der Luft am offenen Ende einer cylindrischen Röhre zu bestimmen, wenn im Innern der Röhre durch irgend eine Ursache ebene Wellen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen in der Secunde entsprechen, zu Stande gekommen sind, und sich die Bewegung durch die Mündung der Röhre der äusseren Luft mittheilt, welche übrigens zunächst durch keine anderen Schall erregenden Kräfte afficirt sein möge.

Die Form der Röhre sei im Allgemeinen cylindrisch von beliebigem Querschnitte; nur in geringer Entfernung von der Mündung möge dieselbe von der cylindrischen Form abweichen dürfen. Wir schliessen also Röhren mit trompetenförmigen oder halb gedeckten Mündungen in unsere Untersuchung ein. Uebrigens setzen wir voraus, dass sowohl die Dimensionen der Oeffnung, wie auch die Länge des nicht cylindrischen Theils der Röhre gegen die Wellenlänge verschwindend klein seien. Den äusseren Raum denken wir uns der Einfachheit wegen nach einer Seite begrenzt durch eine unendliche Ebene, welche senkrecht gegen den cylindrischen Theil der Röhrenwand gerichtet ist, und in welcher die Röhrenmündung selbst liegt. Diese Ebene sei die yz-Ebene, die Röhre befinde sich auf Seite der negativen x, deren Axe im Innern der Röhre liegen und dem cylindrischen Theile ihrer Wand parallel sein soll. Auf Seite der positiven x sei der Luftraum unbegrenzt. Nach der gemachten Annahme betrachten wir ky und kz als verschwindend klein gegen 1, wenn y und z Coordinaten

eines Punktes der Röhrenmündung sind, und ebenso kx, wenn x einem Punkte des nicht cylindrischen Theils der Röhrenwand angehört.

Unsere Voraussetzungen über die Natur der Bewegung, welche wir untersuchen wollen, drücken sich nun in folgenden Gleichungen aus. Erstens nehmen wir an, dass irgendwo in der Röhre sich ein Abschnitt befinde, zwischen welchem und der Mündung keine äusseren Kräfte auf die Luftmasse einwirken, und in welchem das Geschwindigkeitspotential Ψ unendlich [31] wenig verschieden sei von der Form

$$\Psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos(2\pi n t) + \left(\frac{\mathfrak{A}}{k}\sin kx + \mathfrak{B}\cos kx\right)\sin(2\pi n t).$$

Dies ist die allgemeinste Form[21]), welche ebene Wellen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen angehören, haben können. Zur weiteren Vereinfachung wollen wir gleich den Anfang der Zeit t so festsetzen, was offenbar immer möglich ist, dass $\mathfrak{A} = 0$ wird, und somit Ψ in dem besagten Abschnitte der Röhre die Form erhält:

$$(10)\quad \Psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos(2\pi nt) + \mathfrak{B}\cos kx \sin(2\pi nt).$$

Auf Seite der positiven x denke man sich zwei halbe Kugelflächen von sehr grossem Radius construirt, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt. Zwischen beiden soll Ψ die Form kugeliger Wellen haben, die in den unendlichen Raum hinauslaufen, nämlich, wenn wir, wie früher, die Entfernung vom Anfang der Coordinaten mit ϱ bezeichnen:

$$(10^a)\quad \Psi = M\frac{\cos(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho} - M_1\frac{\sin(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho},$$

wo M und M_1 unabhängig von ϱ, aber möglicher Weise abhängig von den Winkeln sind, die ϱ mit den Coordinatenaxen bildet.

Jenseits der äusseren jener beiden Kugelflächen mag noch ein Raum liegen, wo die Schallbewegung erst beginnt, aber zwischen der Region der ebenen Wellen in der Röhre, deren Bewegung in der Gleichung (10) gegeben ist, und der Region der Kugelwellen von der Form (10^a) soll die Stärke und Phase

der Luftschwingungen stationär geworden sein, also Ψ hier überall von der Form sein:

$$(10^b) \qquad \Psi = \Psi' \cos(2\pi n t) + \Psi'' \sin(2\pi n t),$$

worin Ψ' und Ψ'' Functionen der Coordinaten, aber unabhängig von der Zeit sind und in diesem ganzen Theile des Luftraumes die Bedingung erfüllen:

$$(3^b) \qquad 0 = k^2 \Psi + \nabla \Psi.$$

Endlich muss noch längs der ganzen Wand der Röhre und an dem Theile der yz-Ebene, welcher nicht von der Röhrenmündung eingenommen ist, sein:

$$(10^c) \qquad \frac{d\Psi}{dn} = 0.$$

Wir wollen nun die Beziehungen zwischen den Coefficienten A, B, $\mathfrak{B}$, M und M_1 der Gleichungen (10) und (10^a) mittelst des erweiterten *Green*'schen Theorems aufsuchen.

[32] Die erste Anwendung der Gleichung (7) machen wir auf den inneren Raum der Röhre, diesen von der Ebene der Mündung bis zu einer damit parallelen Ebene genommen, welche in der Region der ebenen Wellen liegt. Die Function Φ der Gleichung (7) setzen wir hier:

$$\Phi = \cos kx.$$

Da sowohl Φ wie Ψ die Gleichung (3^b) erfüllen innerhalb des hier betrachteten Raumes, so reducirt sich Gleichung (7) auf

$$(7^b) \qquad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 0.$$

Nun ist $\frac{d\Psi}{dn}$ nur an der Mündung und in dem Querschnitte der Röhre von Null verschieden, dort ist es gleich $-\frac{d\Psi}{dx}$, hier gleich $+\frac{d\Psi}{dx}$. Es wird also [22]):

$$\int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = -\cos 2\pi n t \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega - \sin 2\pi n t \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} d\omega$$
$$+ Q(A \cos kx - Bk \sin kx) \cos kx \cos(2\pi n t)$$
$$- Q\mathfrak{B}k \sin kx \cos kx \sin(2\pi n t).$$

Durch den Horizontalstrich $\overline{\Psi}$ oder $\frac{d\overline{\Psi}}{dx}$ sollen hier und fortan die Werthe bezeichnet werden, welche die betreffenden Functionen in der Ebene der Röhrenmündung haben. Mit Q ist die Grösse des Querschnitts des cylindrischen Theils der Röhre bezeichnet. Dagegen ist $\frac{d\Phi}{dn}$ am cylindrischen Theile der Röhrenwand und in der Oeffnung der Röhre gleich Null. Von Null verschieden ist es nur in dem Querschnitte der Röhre, wo es den Werth $-k \sin kx$ hat, und in dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand. Nennt man den Winkel, den die nach innen gerichtete Normale der Röhrenwand mit den positiven x bildet, β, so ist, da $\frac{d\Phi}{dy} = \frac{d\Phi}{dz} = 0$,

$$\frac{d\Phi}{dn} = \cos\beta \frac{d\Phi}{dx} = -k \sin kx \cos\beta .$$

Wir haben also[23]):

$$\begin{aligned}\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega = & - Q(A \sin kx + kB \cos kx) \sin kx \cos(2\pi n t) \\ & - Qk\mathfrak{B} \cos kx \sin kx \sin(2\pi n t) \\ & - k\cos(2\pi n t)\int \Psi' \sin kx \cos\beta d\omega \\ & - k\sin(2\pi n t)\int \Psi'' \sin kx \cos\beta d\omega .\end{aligned}$$

Wenn man diese Werthe der Integrale in die Gleichung (7^b) einführt, und [33] einzeln die mit $\cos(2\pi n t)$ und die mit $\sin(2\pi n t)$ multiplicirten Glieder gleich Null setzt, so erhält man

$$(11) \qquad AQ = \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega - k\int \Psi' \sin kx \cos\beta\, d\omega ,$$

$$(11^a) \qquad 0 = \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} d\omega - k\int \Psi'' \sin kx \cos\beta\, d\omega .$$

In beiden Gleichungen ist das erste Integral über die ganze Oeffnung der Röhre zu nehmen, das zweite über die Wand der Röhre, doch wollen wir gleich bemerken, dass an allen Stellen, wo $\cos\beta$ von Null verschieden ist, kx nach unserer Annahme eine verschwindend kleine Grösse wird. In rein cylindrischen Röhren mit ganz offener oder theilweis gedeckter Mündung fallen diese letzteren Integrale ganz weg.

Die zweite Anwendung des Theorems (7) machen wir auf den freien Raum auf Seite der positiven x, der einerseits begrenzt gedacht wird durch die yz-Ebene, andererseits durch eine um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt construirte halbe Kugelfläche, welche in die Region der kugeligen Wellen fällt. Innerhalb dieses Raumes liege der Punkt, dessen Coordinaten α, β, γ sind. Die Entfernung des Punktes x, y, z von ihm sei $r_{,}$, während $r_{,,}$ die Entfernung von dem Punkte sei, dessen Coordinaten $-\alpha, \beta, \gamma$ sind, und der ausserhalb des hier betrachteten Raumes liegt. Die Function Φ der Gleichung (7) setzen wir

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{\cos(kr_{,} - 2\pi n t)}{r_{,}} + \frac{1}{2} \frac{\cos(kr_{,,} - 2\pi n t)}{r_{,,}}.$$

Indem wir nun die Gleichung (7) anwenden mit Beachtung des in (7^c) berücksichtigten Umstandes der Unstetigkeit von Φ im Punkte α, β, γ, erhalten wir[24]):

$$(11^b) \quad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 2\pi \cos(2\pi n t)\, \Psi_\alpha ,$$

wo Ψ_α den Werth von Ψ im Punkte α, β, γ bezeichnet.

Wie im Falle der Gleichung (9) wird die Grösse $\Psi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\Psi}{dn}$ an der weit entfernten Kugelfläche eine von der Zeit unabhängige Grösse, ebenso natürlich auch das Integral dieser Grösse über die Kugelfläche, welches wir mit $\mathfrak{C}$ bezeichnen wollen. An der yz-Ebene dagegen ist $\frac{d\Phi}{dn}$ überall gleich Null[19]), ebenso $\frac{d\Psi}{dn}$ überall mit Ausnahme der Oeffnung, wo es gleich $\frac{d\overline{\Psi}}{dx}$ ist; [34] Φ aber bekommt den Werth:

$$\overline{\Phi} = \frac{\cos(kr_{,} - 2\pi n t)}{r_{,}},$$

weil an der yz-Ebene $r_{,} = r_{,,}$ ist. So erhalten wir die Gleichung:

$$(11^c) \quad \mathfrak{C} - \int \frac{d\overline{\Psi}}{dx} \frac{\cos(kr_{,} - 2\pi n t)}{r_{,}} d\omega = 2\pi \cos(2\pi n t)\, \Psi_\alpha .$$

Setzen wir nun nach Gleichung (10^b):

$$(10^b)\qquad \Psi = \Psi' \cos(2\pi n t) + \Psi'' \sin(2\pi n t),$$

so können wir in der Gleichung (11^c), welche für alle Werthe von t erfüllt sein muss, die Quadrate und Producte von $\cos(2\pi n t)$ und $\sin(2\pi n t)$ durch $\cos(4\pi n t)$ und $\sin(4\pi n t)$ ausdrücken und dann einzeln gleich Null setzen: 1) die Glieder, welche nach der Zeit constant sind, 2) die Glieder, welche mit $\cos(4\pi n t)$ multiplicirt sind, und 3) die mit $\sin(4\pi n t)$ multiplicirten, und erhalten dadurch folgende drei Gleichungen:

$$(11^d)\quad \begin{cases} \mathfrak{C} = \pi \Psi'_\alpha + \frac{1}{2}\int \left(\frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\cos k r_{,}}{r_{,}} + \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} \frac{\sin k r_{,}}{r_{,}} \right) d\omega, \\ 0 = \pi \Psi'_\alpha + \frac{1}{2}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\cos k r_{,}}{r_{,}} d\omega - \frac{1}{2}\int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} \frac{\sin k r_{,}}{r_{,}} d\omega, \\ 0 = \pi \Psi''_\alpha + \frac{1}{2}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\sin k r_{,}}{r_{,}} d\omega + \frac{1}{2}\int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} \frac{\cos k r_{,}}{r_{,}} d\omega. \end{cases}$$

Die Integrationen sind über die Oeffnung der Röhre auszudehnen. Durch die beiden letzten Gleichungen ist der Werth der Functionen Ψ' und Ψ'' für alle Punkte des Raumes auf Seite der positiven x gegeben, wenn die Werthe von $\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}$ und $\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}$ in der Oeffnung der Röhre bekannt sind. Die erste Gleichung folgt aus den beiden anderen mittelst des Theorems (7^d)[25]. Der Werth von Ψ_α wird demnach:

$$(11^e)\qquad \Psi_\alpha = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\cos(k r_{,} - 2\pi n t)}{r_{,}} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} \frac{\sin(k r_{,} - 2\pi n t)}{r_{,}} d\omega.$$

Wenn wir statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten einführen, nämlich

$$\alpha = \varrho \cos \omega, \quad \beta = \varrho \sin \omega \cos \vartheta, \quad \gamma = \varrho \sin \omega \sin \vartheta,$$

so wird in unendlich grosser Entfernung ϱ vom Anfangspunkte der Coordinaten mittelst einer ähnlichen Umformung, wie sie in (8^a) ausgeführt ist:

$$(10^a) \qquad \Psi = M \frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho} - M_1 \frac{\sin(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho},$$

[35] wo[26])

$$(11^f) \begin{cases} M = -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\cos k\varepsilon + \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\sin k\varepsilon\right) dy\, dz, \\ M_1 = -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\cos k\varepsilon - \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\sin k\varepsilon\right) dy\, dz, \end{cases}$$

$$\varepsilon = y \sin\omega \cos\vartheta + z \sin\omega \sin\vartheta,$$

und wo die Integrationen über die Oeffnung der Röhre auszudehnen sind.

Eine dritte Anwendung des erweiterten *Green*'schen Satzes machen wir auf den Raum, welcher zwischen einem Querschnitte der Röhre in der Region der ebenen Wellen und einer halben Kugelfläche in der Region der kugeligen Wellen liegt. Für die Functionen Ψ und Φ der Gleichung (7) setzen wir Ψ' und Ψ'' und haben wie in (7^b):

$$(7^b) \qquad \int \Psi' \frac{d\Psi''}{dn} d\omega - \int \Psi'' \frac{d\Psi'}{dn} d\omega = 0.$$

Da längs der ganzen festen Wand des Raumes $\frac{d\Psi'}{dn} = \frac{d\Psi''}{dn} = 0$, so ist die Integration nur über den Querschnitt der Röhre und die Halbkugel auszudehnen. Im Querschnitt ist:

$$\Psi' = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx,$$

$$\Psi'' = \mathfrak{B}\cos kx,$$

$$\Psi' \frac{d\Psi''}{dx} - \Psi'' \frac{d\Psi'}{dx} = -A\mathfrak{B}.$$

An der Kugelfläche ist[27]):

$$\Psi' = M\frac{\cos k\varrho}{\varrho} - M_1 \frac{\sin k\varrho}{\varrho},$$

$$\Psi'' = M\frac{\sin k\varrho}{\varrho} + M_1 \frac{\cos k\varrho}{\varrho},$$

$$-\Psi' \frac{d\Psi''}{d\varrho} + \Psi'' \frac{d\Psi'}{d\varrho} = -\frac{k(M^2 + M_1^2)}{\varrho^2}.$$

Wenn man die Integrale nimmt, wird:

$$(11^g) \qquad 0 = A\mathfrak{B}Q + k\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \int_0^{2\pi} d\vartheta (M^2 + M_1^2) \sin\omega\,.$$

---

[36] Endlich wenden wir noch das Theorem (7) auf den inneren Raum der Röhre an, von der Ebene der Mündung bis zu einem Querschnitt in der Region der ebenen Wellen für die Function Ψ' und

$$\Phi = \sin kx\,,$$

$$(7^b) \qquad \int \Psi' \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi'}{dn} d\omega = 0\,.$$

Am Querschnitte der Röhre wird

$$\Psi' \frac{d\Phi}{dx} - \Phi \frac{d\Psi'}{dx} = kB\,.$$

An der Wand der Röhre wird $\frac{d\Psi'}{dn} = 0$, an ihrer Mündung $\Phi = 0$, so dass das zweite Integral der Gleichung (7^b) verschwindet. Im ersten wird an der Wand der Röhre[23]):

$$\frac{d\Phi}{dn} = k \cos kx \cos\beta\,,$$

an der Mündung $\frac{d\Phi}{dn} = -k$. Also haben wir:

$$(11^h) \qquad QB + \int \Psi' \cos kx \cos\beta\, d\omega - \int \overline{\Psi'}\, d\omega = 0\,,$$

wo das erste Integral über den nicht cylindrischen Theil der Röhrenwand auszudehnen ist, so weit $\cos\beta$ sich von Null unterscheidet, das zweite über die Oeffnung der Röhre.

Wir haben jetzt in den Gleichungen (11), (11^a), (11^d), (11^f), (11^g), (11^h) die Werthe der Coefficienten A, B, $\mathfrak{B}$, M, M_1 und der Functionen Ψ' und Ψ'' im freien Raume zurückgeführt auf Integrale, in denen nur die Werthe vorkommen, welche Ψ', Ψ'' und ihre Differentialquotienten theils in der

Mündung der Röhre selbst, theils an dem nicht cylindrischen Theile ihrer Wand haben. Wir wollen jetzt die Vereinfachungen dieser Ausdrücke einführen, welche daraus herfliessen, dass die Dimensionen der Mündung und die Länge des nicht cylindrischen Theiles des Röhre unserer Annahme nach gegen die Wellenlänge verschwindend klein sein sollen. Vernachlässigen wir Grössen von der Ordnung $k\varepsilon$ gegen 1, so nehmen unsere Gleichungen (11), (11^a) und (11^f) folgende Gestalt an[28]):

$$(12) \qquad AQ = \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\, d\omega\,,$$

[37]

$$(12^a) \qquad 0 = \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\, d\omega - k^2 \int \Psi'' x \cos\beta\, d\omega\,,$$

$$(12^b) \qquad M = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\, d\omega = -\frac{1}{2\pi} AQ\,.$$

Für den Werth von M_1 ist zu bemerken, dass das von k unabhängige Glied desselben $\int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\, d\omega$ nach (12^a) selbst eine verschwindend kleine Grösse ist, dass ferner auch das mit der ersten Potenz von k multiplicirte $\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\, \varepsilon\, d\omega$ der Null gleich gemacht werden kann, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten, über den bisher nur bestimmt ist, dass er in der Oeffnung der Röhre liegen solle, in den Schwerpunkt einer Masse verlegt, welche mit der Dichtigkeit $\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}$ über die Fläche der Oeffnung verbreitet ist; also reducirt sich der Werth von M_1 auf verschwindend kleine Grössen, nämlich

$$(12^c) \quad M_1 = \frac{-k^2}{2\pi} \int \Psi'' x \cos\beta\, d\omega + \frac{k^2}{4\pi} \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\, \varepsilon^2\, d\omega\,.$$

Wir werden also M_1 gegen M vernachlässigen und letzteres als unabhängig von den Winkeln ω und ϑ betrachten dürfen, also aus (11^g) erhalten:

$$A\mathfrak{B}Q = -2\pi k M^2\,,$$

oder mit Berücksichtigung von

$$(12^b) \qquad AQ = -2\pi M,$$

$$(12^d) \qquad \mathfrak{B} = kM = -\frac{k}{2\pi} AQ,$$

endlich:

$$(12^e) \qquad QB = \int \overline{\Psi'}\, d\omega - \int \Psi' \cos\beta\, d\omega .$$

Da nun übrigens nach (11^e) in der Ebene der Mündung mit Vernachlässigung kleiner Grössen [28a])

$$\overline{\Psi'} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\frac{d\omega}{r}$$

und

$$(12^b) \qquad M = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\, d\omega = -\frac{1}{2\pi} AQ,$$

so sind M oder AQ und $\varepsilon\overline{\Psi'}$ Grössen von gleicher Ordnung. Nun können wir die Gleichung (12^e) schreiben:

$$QB = \pm \iint \Psi'\, dy\, dz,$$

[38] wo die Integration über alle Werthe von z und y auszudehnen ist, welche der Oeffnung und Wand der Röhre angehören, und das $+$ Zeichen sowohl an der Oeffnung als an denjenigen Theilen der Wand zu nehmen ist, deren Normale mit den negativen x einen spitzen Winkel bildet, das $-$ Zeichen an den Theilen, deren Normale mit den positiven x einen spitzen Winkel bildet. QB ist also gleich den Werthen von Ψ' in der Nähe der Oeffnung, integrirt über eine Fläche von der Grösse Q, also ist B von der Grössenordnung $\overline{\Psi'}$ oder $\frac{AQ}{\varepsilon}$. Wenn also der Querschnitt der Röhre von derselben Ordnung kleiner Grössen wie die Oeffnung, d. h. von der Oeffnung ε^2 ist, ist B von der Ordnung $A\varepsilon$. Genauer lässt sich bei der Allgemeinheit unserer Annahmen das Verhältniss $\frac{B}{A}$ nicht bestimmen. Wir werden später bei den Beispielen sehen, dass es von der Form der Mündung abhängt, von welcher wir das Verhältniss $\frac{\mathfrak{B}}{A}$ unabhängig gefunden haben, und dass es nicht merklich von dem Werthe von k abhängt, so lange

der Querschnitt der Röhre und die Länge des nicht cylindrischen Theiles als verschwindend gegen die Wellenlänge zu betrachten sind. Ist übrigens die Oeffnung der Röhre sehr klein gegen den Querschnitt, so kann $\frac{B}{A}$ jeden beliebigen grösseren Werth erreichen.

Innerhalb der tieferen Theile der Röhre ist also, wenn wir setzen

$$(12^f) \qquad \frac{kB}{A} = -\operatorname{tang} k\alpha\,,$$

$$(12^g) \qquad \Psi = \frac{A}{k\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\cos(2\pi n t) - \frac{AkQ}{2\pi}\cos kx \sin(2\pi n t)\,,$$

und dazu gehört die Bewegung in den entfernten Stellen des freien Raumes, indem wir M_1 gegen M vernachlässigen,

$$(12^h) \qquad \Psi = -\frac{AQ}{2\pi}\frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho}\,,$$

in welchen beiden Gleichungen A eine willkürliche Constante ist, und α für jede besondere Röhrenform besonders bestimmt werden muss.

Die Natur des hier behandelten Problems wird noch klarer, wenn man auf den Grenzfall übergeht, wo $k = 0$ wird. Dann werden die beiden Functionen Ψ' und Ψ'' von einander unabhängig, und es entstehen aus unserem Problem folgende zwei Aufgaben:

[39] 1) Es ist eine Function Ψ' zu suchen, welche in dem ganzen betrachteten Raume der Bedingung genügt, dass

$$\nabla \Psi' = 0\,,$$

welche für grosse negative x übergeht in $Ax + B$, für grosse positive in $-\frac{AQ}{2\pi\varrho}$, und für die längs der ganzen festen Wand $\frac{d\Psi'}{dn} = 0$ ist. Es ist dies mathematisch dieselbe Aufgabe, als hätten wir einen homogenen elektrischen Leiter von der Gestalt unseres Luftraumes, welchen ein elektrischer

Strom von bestimmter Intensität (AQ, wenn das Leitungsvermögen des Stoffes gleich 1 ist) durchfliesst, der aus dem cylindrischen Theile in den unendlichen Raum übergeht.[29]) Wir nennen bekanntlich den Leitungswiderstand zweier Leiter gleich, wenn bei gleicher Intensität des Stromes ihre Endflächen Flächen constanten Potentials sind und dieselbe Differenz des Potentials zeigen. Nun ist in irgend einem Querschnitte des cylindrischen Theiles die Potentialfunction $Ax + B$, für unendliche Entfernung im freien Raume Null. Denken wir uns dagegen den cylindrischen Leiter cylindrisch fortgesetzt und überall die Potentialfunction gleich $Ax + B$, so wird sie Null, wenn $x = -\frac{B}{A} = \alpha$. Es ist also $-(x - \alpha)$ die Länge eines cylindrischen Leiters von demselben Material, welcher denselben elektrischen Widerstand bietet wie der Leiter von Gestalt unseres Luftraumes, gerechnet von einem Querschnitt des cylindrischen Theiles in der Entfernung $-x$ von der Mündung bis in unendliche Entfernung im freien Raume. Nach der in der Elektricitätslehre gebräuchlichen Terminologie würde also $-(x - \alpha)$ die reducirte Länge jenes Leiters genannt werden können, und wir wollen dieselbe Benennung auch hier brauchen. Die Constante B oder α verschwindet also nicht mit k zugleich, obgleich andererseits einzusehen ist, dass sie meistens nicht gross sein kann, da der Widerstand unendlich ausgedehnter Leiter, wie der der Erde, immer sehr klein ist verglichen mit dem Widerstande cylindrischer Leiter von demselben Material, aus denen die Elektricität in den unendlichen Leiter ausströmt, und es folgt auch weiter aus den bekannten Theoremen über Elektricitätsleitung, dass α desto grösser werden muss, je enger die Mündung der Röhre gemacht wird, was sich auch in den akustischen Versuchen durch die Veränderung des Tons der Röhren zeigt, dessen Abhängigkeit vom Werthe von α wir unten feststellen werden.

Wenn die Oeffnung sehr klein und kreisförmig ist, während die den Cylinder schliessende Wand in ihrer Nähe nahehin eben ist, lässt sich annehmen, [40] dass der Widerstand hauptsächlich nur von den dicht bei der Oeffnung gelegenen Theilen herrührt, wo die Bahn der Strömung am engsten ist. Der Widerstand einer kreisförmigen Oeffnung vom Radius R in einer isolirenden Ebene, welche zwei unendlich ausgedehnte Leiter von einander trennt, ist aber, ausgedrückt durch die Länge l eines Cylinders vom Querschnitt Q[29a]):

$$(12^i) \qquad l = \frac{Q}{2R},$$

und dies würde in diesem Falle auch der Werth von $-\frac{B}{A}$ sein.

2) Es ist eine Function $\frac{1}{k}\Psi''$ zu suchen, welche im ganzen betrachteten Raume der Bedingung genügt, dass $\nabla\Psi'' = 0$, welche für grosse Entfernungen von der Mündung sowohl auf Seite der negativen wie der positiven x wird[30]:

$$\frac{1}{k}\Psi'' = -\frac{AQ}{2\pi}$$

und längs der ganzen festen Wand des Luftraumes $\frac{d\Psi}{dn} = 0$. Offenbar ist unter diesen Umständen Ψ'' im ganzen Raume constant. Hierbei wird dann ersichtlich, dass in der Oeffnung nicht bloss, wie wir schon gesehen, die Grösse $\int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\,d\omega$, sondern auch $\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}$ selbst mit k zugleich verschwindet.

---

§ 7.

Form der Wellen in der Röhre.

Die bisher gewonnenen Sätze lassen nun eine Reihe allgemeiner Folgerungen ziehen nicht bloss über die Lage der Schwingungs-Minima und -Maxima (Knoten und Bäuche der Schwingungen) und die davon abhängende Höhe der natürlichen Töne der Röhre, die wir als Töne stärkster Resonanz charakterisiren können, welche Aufgaben schon die bisherigen Theorien mehr oder weniger genügend behandelt haben, sondern sie geben uns für eine Reihe besonderer Erregungsweisen der Töne auch bestimmte Auskunft über die Stärke und Phasen der in der Röhre erregten Schwingungen.

Die Geschwindigkeit der Lufttheilchen ist, aus (12^g)[31] berechnet:

$$(13) \quad \frac{d\Psi}{dx} = \frac{A}{\cos k\alpha}\cos k(x-\alpha)\cos(2\pi n t) + \frac{Ak^2 Q}{2\pi}\sin kx \sin(2\pi n t)$$

oder

[41]

$$(13^a)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Psi}{dx} = J\cos(2\pi n t + \tau), \\ \text{wenn} \\ J = A\sqrt{\dfrac{\cos^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \dfrac{k^4 Q^2}{4\pi^2}\sin^2 kx}\,, \\ \operatorname{tang}\tau = -\dfrac{k^2 Q \sin kx \cos k\alpha}{2\pi\cos k(x-\alpha)}. \end{cases}$$

Die Werthe von x, für welche J^2 ein Maximum oder Minimum wird, werden gefunden durch die Gleichung[32]:

$$(13^b)\quad \operatorname{tang} 2k(x-\alpha) = \frac{k^4 Q^2 \sin k\alpha \cos^3 k\alpha}{2\pi^2\left(1 - \dfrac{k^4 Q^2}{4\pi^2}\cos 2k\alpha \,.\, \cos^2 k\alpha\right)}.$$

Wenn x_0 ein Werth ist, der, für x gesetzt, diese Gleichung erfüllt, so wird sie auch erfüllt durch

$$x = x_0 + \mathfrak{a}\frac{\lambda}{4} = x_0 + \frac{\mathfrak{a}\pi}{2k},$$

worin $\mathfrak{a}$ eine beliebige negative oder positive Zahl bezeichnet. Die Maxima und Minima der Schwingung liegen also in der Röhre um Viertelwellenlängen von einander entfernt. Sie liegen aber nicht nothwendig um ein genaues Vielfaches einer Viertelwellenlänge von der Oeffnung der Röhre entfernt. Wenn, wie wir im Folgenden immer annehmen wollen, $k^2 Q$ eine unendlich kleine Grösse ist, so wird mit Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung die Gleichung (13^b):

$$\operatorname{tang} 2k(x-\alpha) = 0.$$

Dann wird J^2 ein Maximum $J_{,}^2$, wenn

$$k(x-\alpha) = \mathfrak{a}\pi, \quad \text{also} \quad \cos k(x-\alpha) = \pm 1,$$

$$J_{,}^2 = \frac{A^2}{\cos^2 k\alpha},$$

und J^2 wird ein Minimum $J_{,,}^2$, wenn

$$k(x-\alpha) = (\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2})\pi, \quad \text{also} \quad \cos k(x-\alpha) = 0,$$

$$J_{,,}^2 = A^2\frac{k^4 Q^2}{4\pi^2}\cos^2 k\alpha.$$

Denken wir uns die ebenen Wellen bis zur Mündung der Röhre fortgesetzt, so würde in der kleinen Entfernung α vor der Oeffnung ein Maximum der Schwingung liegen. Denken wir uns die Entfernungen der Querschnitte der Röhre von diesem um die Länge α vor der Oeffnung[33]) in der Axe der Röhre gelegenen Punkte [42] gezählt und nennen diese Entfernungen die reducirten Längen des betreffenden Röhrenstücks, so erhalten wir Maxima der Schwingung überall, wo die reducirte Länge gleich einem geraden Vielfachen der Viertelwellenlänge, und Minima der Schwingung (Knotenflächen), wo die reducirte Länge der Röhre einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge gleich ist. In den Knotenflächen herrscht aber nicht absolute Ruhe, sondern die Bewegung wird nur sehr klein.

Am Orte der Maxima der Schwingung wird tang τ gleich einer unendlich kleinen Grösse, also $\tau = \mathfrak{a}\pi$, am Orte der Minima wird tang $\tau = \infty$, also $\tau = (\mathfrak{a} + \frac{1}{2})\pi$, folglich sind die Phasen der Bewegung am Orte der Maxima und Minima um eine Viertelschwingungsdauer verschieden.

Nach Gleichung (1^f) ist die Verdichtung der Luft, wo keine äusseren Kräfte wirken:

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{a^2}\frac{d\Psi}{dt},$$

also in unserem Falle:

$$(14)\quad \mathfrak{h} = \frac{A}{a\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\sin(2\pi nt) + \frac{Ak^2 Q}{2\pi a}\cos kx\cos(2\pi nt)$$

oder

$$(14^a)\quad \begin{cases} \mathfrak{h} = L\sin(2\pi nt + \tau_{\prime}), \\ \text{wenn} \\ L = \dfrac{A}{a}\sqrt{\dfrac{\sin^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \dfrac{k^4 Q^2 \cos^2 kx}{4\pi^2}}, \\ \operatorname{tang} \tau_{\prime} = \dfrac{k^2 Q\cos kx\cos k\alpha}{2\pi\sin k(x-\alpha)}. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichung, welche die Werthe von x giebt, für welche L^2 ein Maximum oder Minimum wird, ist dieselbe wie (13^b), welche oben für die Grenzwerthe von J^2 aufgestellt

ist, aber wo letzteres ein Maximum ist, wird L^2 ein Minimum, und umgekehrt[34]). Wo L^2 ein Maximum, wird tang $\tau_{,} = 0$ (oder vielmehr gleich einer verschwindend kleinen Grösse), also:

$$\mathfrak{h} = \pm \frac{A}{a \cos k\alpha} \sin(2\pi n t), \qquad \frac{d\Psi}{dx} = \pm \frac{A k^2 Q \cos k\alpha}{2\pi} \sin(2\pi n t),$$

wo L^2 ein Minimum ist, wird tang $\tau_{,} = \infty$,

$$\mathfrak{h} = \pm \frac{A k^2 Q \cos k\alpha}{2\pi a} \cos(2\pi n t), \qquad \frac{d\Psi}{dx} = \pm \frac{A}{\cos k\alpha} \cos(2\pi n t).$$

An diesen Stellen also fällt das Maximum der Verdichtung mit dem Maximum der Geschwindigkeit in der Zeit zusammen, nicht aber an den zwischenliegenden [**43**] Stellen. Denn wo weder $\sin k(x - \alpha)$ noch $\cos k(x - \alpha)$ der Null nahe sind, sind sowohl tang τ als tang $\tau_{,}$ sehr kleine Grössen, und es wird also nahehin

$$\mathfrak{h} = L \sin(2\pi n t), \qquad \frac{d\Psi}{dx} = J \cos(2\pi n t),$$

so dass hier die Maxima des Druckes und der Geschwindigkeit nahehin um ein Viertel-Undulationszeit auseinanderfallen.

Denkt man sich die ebenen Wellen bis zur Oeffnung der Röhre, wo $x = 0$, fortgesetzt, so wird dort tang $\tau = 0$, dagegen

$$\text{tang}\, \tau_{,} = -\frac{k^2 Q}{2\pi} \text{cotang}\, k\alpha.$$

Nun ist im Allgemeinen tang $k\alpha$ eine kleine Grösse erster Ordnung, $k^2 Q$ eine solche zweiter Ordnung, also tang $\tau_{,}$ sehr klein und $\tau_{,}$ nahe an Null. Aber es kann auch für besondere Röhrenformen $\alpha = 0$ werden, dann würde $\tau_{,} = \frac{1}{2}\pi$. Im ersteren Falle würden in der Oeffnung die Maxima der Geschwindigkeit und der Verdichtung um eine Viertelundulation der Zeit nach aus einander liegen, im zweiten Falle zusammenfallen. *Poisson*'s Voraussetzung, dass die Verdichtung in der Oeffnung gleich der Geschwindigkeit, multiplicirt mit einer sehr kleinen Constanten, sei, ist also nur in einem besonderen Falle richtig, den er allerdings als den allgemeinen betrachtete. Auch in diesem Falle ist sie übrigens nur richtig, wenn man sich erlaubt, die ebenen Wellen bis zur Mündung der Röhre fortgesetzt zu denken, aber nicht, wenn man die wirklich in der Oeffnung stattfindenden mittleren Werthe der Geschwindigkeit und Verdichtung nimmt.

Was die Lage der einzelnen Wellenphasen in einem gegebenen Augenblicke betrifft, so finden wir die Lage der Geschwindigkeitsmaxima in der Region der ebenen Wellen, indem wir $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$ setzen, oder auch $\Psi = 0$, da hier $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0$. Also:

$$0 = \frac{A}{k}\cos(2\pi nt)\sin kx + [B\cos(2\pi nt) + \mathfrak{B}\sin(2\pi nt)]\cos kx;$$

daraus folgt als Bedingung (s. (12^f) und (12^g))

$$(14^b) \qquad \operatorname{tang} kx = \operatorname{tang} k\alpha + \frac{k^2 Q}{2\pi}\operatorname{tang}(2\pi nt).$$

Wenn $t = 0$, wird

$$\operatorname{tang} kx = \operatorname{tang} k\alpha,$$

die Maxima der Geschwindigkeit liegen dann, wo $-(x-\alpha) = \mathfrak{a}\lambda$, die Minima, [44] wo $-(x-\alpha) = (\mathfrak{a}+\frac{1}{2})\lambda$.[35] Wenn nun t wächst, so bleibt, weil $k^2 Q$ eine verschwindend kleine Grösse ist, doch immer noch $\operatorname{tang} kx$ unmerklich wenig verschieden von $\operatorname{tang} k\alpha$, also die Lage der Maxima und Minima unverändert, so lange $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ endliche Werthe hat. Wenn aber t sich dem Werthe einer Viertelschwingungsdauer nähert, wird auch $\operatorname{tang} kx$ gleichzeitig mit $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ erst $+\infty$, dann $-\infty$, dann aber, so wie $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ endliche negative Werthe erreicht hat, wird $\operatorname{tang} kx$ wieder gleich $\operatorname{tang} k\alpha$, und so bleibt es wieder während beinahe einer halben Schwingungsdauer stationär, so lange $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ endlich bleibt. So oft nun $\operatorname{tang} kx$ vom Werthe $\operatorname{tang} k\alpha$ auf $+\infty$ wächst, dann von $-\infty$ durch die negativen Werthe bis 0 und wieder auf $\operatorname{tang} k\alpha$ übergeht, muss kx um π wachsen und x selbst um $\frac{1}{2}\lambda$. So wird also ein Maximum, welches zur Zeit $t = 0$ da liegt, wo die reducirte Länge $\mathfrak{a}\lambda$ beträgt, um die Zeit $t = \frac{1}{4n}$ schnell übergehen auf die reducirte Länge $(\mathfrak{a}-\frac{1}{2})\lambda$, hier beinahe stillstehen bis $t = \frac{3}{4n}$, dann schnell fortschreiten auf $(\mathfrak{a}-1)\lambda$ u. s. w.

Im freien Raume dagegen bewegen sich die Maxima der Geschwindigkeit mit der gleichmässigen Fortpflanzungsgeschwindigkeit a vorwärts. In den entfernteren Theilen des freien Raumes liegen sie zur Zeit $t = 0$, wo $\varrho = (\mathfrak{b}+\frac{1}{4})\lambda$.

Der Abstand zweier Maxima der Geschwindigkeit, von denen eines im freien Raume in der x-Axe, das andere in der Röhre gelegen ist, zur Zeit $t = 0$ ist $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{4})\lambda - \alpha$. Da bis zur Zeit $t = \frac{1}{4n}$ das Maximum in der Röhre fast ganz still steht, das im freien Raume um $\frac{1}{4}\lambda$ fortschreitet, so wächst die Entfernung beider Maxima bis auf nahehin $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{2})\lambda - \alpha$, geht dann ziemlich schnell zurück auf $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\lambda - \alpha$, um während der nächsten halben Schwingungsdauer wieder auf $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{2})\lambda - \alpha$ zu steigen, und bewegt sich so immer zwischen den genannten Grenzen.

Mit der Verdichtung verhält es sich ähnlich[35a]). Ihre Maximalwerthe werden gegeben durch die Gleichung:

$$(14^c) \quad \operatorname{cotang} kx = -\operatorname{tang} k\alpha + \frac{k^2 Q}{2\pi} \operatorname{cotg}(2\pi n t).$$

Zur Zeit $t = \frac{1}{4n}$ ist $\operatorname{cotg}(2\pi n t) = 0$, und die Maxima der Verdichtung liegen, wo die reducirte Länge der Röhre $(\mathfrak{a} - \frac{1}{4})\lambda$ beträgt. Diese Lage behalten sie auch unverändert bis nahehin $t = \frac{2}{4n}$, wo $\operatorname{cotg}(2\pi n t)$ unendlich gross wird. Dann rücken sie schnell vorwärts bis $(\mathfrak{a} - \frac{3}{4})\lambda$. In den entfernteren [45] Theilen des freien Raumes liegen sie, wenn $t = \frac{1}{4n}$, da, wo $\varrho = (\mathfrak{b} + \frac{1}{2})\lambda$. Ihr Abstand von denen in der Röhre beträgt also dann $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{4})\lambda - \alpha$, wächst allmählich auf $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{2})\lambda - \alpha$, sinkt schnell auf $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\lambda - \alpha$, wächst dann wieder allmählich u. s. w. Sowohl die Maxima des Druckes wie der Geschwindigkeit haben ihren grössten Werth in der Röhre, wenn sie stillstehen, ihren kleinsten, wenn sie vorwärts eilen. Uebrigens eilen die Maxima der Geschwindigkeit vorwärts zu den Zeiten und an den Orten, wo die des Druckes stillstehen, und umgekehrt.

Stärke der Resonanz in der Röhre. Denkt man sich die Röhre nur bis $x = -l$ reichend und ihr Ende im Bereiche der ebenen Wellen gelegen, so kann die Erschütterung der Luft in der Röhre entweder an diesem Ende mitgetheilt werden oder von der vorderen Oeffnung der Röhre her, indem ein Schallwellenzug gegen die Mündung der Röhre schlägt. Was zunächst den ersten Fall betrifft, so kann nach Feststellung der Form der ebenen Wellen leicht der Fall

behandelt werden, wo die Röhre durch irgend eine Platte von beliebiger Masse geschlossen ist, welche durch irgend eine elastische Kraft (z. B. einer über die Mündung der Röhre ausgespannten Membran) in ihrer Lage gehalten und durch eine beliebige periodisch wirkende Kraft in Erschütterung versetzt wird. Es lässt sich dann für jede Röhrenform und Tonhöhe, für welche der Werth der Constanten α bekannt ist, sowohl die Form der ebenen Wellen als der Kugelwellen in den entfernteren Theilen des freien Raumes vollständig angeben. Hier genüge es, nur kurz den Fall zu erwähnen, wo eine Bewegung von bestimmter Geschwindigkeit mitgetheilt wird, der also praktisch etwa dem Falle entspricht, wo eine Stimmgabel die Schlussplatte der Röhre erschüttert.

Die Geschwindigkeit der der Schlussplatte mitgetheilten Bewegung sei

$$G \cos(2\pi n t + \tau_{\prime\prime}),$$

wo wir unter $\tau_{\prime\prime}$ eine willkürliche Constante verstehen, mittelst deren wir den Anfang von t passend bestimmen. Dann muss sein für $x = -l$:

$$\frac{d\Psi}{dx} = J \cos(2\pi n t + \tau) = G \cos(2\pi n t + \tau_{\prime\prime}),$$

also

$$(15) \qquad G = J = A \sqrt{\frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 kl},$$

$$(15^a) \qquad \operatorname{tang} \tau_{\prime\prime} = \operatorname{tang} \tau = \frac{k^2 Q \sin kl \cos k\alpha}{2\pi \cos k(l+\alpha)}.$$

[46] Das Geschwindigkeitspotential in den ferneren Theilen des freien Raumes ist

$$\Psi = M \frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho},$$

wo

$$(12^b) \qquad M = -\frac{AQ}{2\pi}.$$

Es lässt sich also A und M aus G und l bestimmen. A, das Schwingungsmaximum in der Röhre, und ebenso M, die Intensität der Kugelwellen im freien Raume, wird bei constantem G, also bei constanter Bewegung der Schlussplatte der Röhre,

am grössten, wenn der Factor von A in (15) am kleinsten ist, d. h. wenn

$$\cos k(l+\alpha)=0\,,\qquad k(l+\alpha)=(\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2})\pi\,.$$

Dann ist[36])

$$A=\frac{2\pi}{k^2 Q\cos k\alpha}\,G=\frac{\lambda^2}{2\pi Q\cos k\alpha}\,G\,,$$

$$M=-\frac{\lambda^2}{4\pi^2\cos k\alpha}\,G\,,$$

$$\tau=(-1)^{\mathfrak{a}}\,\tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Die stärkste Resonanz der Röhre und der stärkste Schall im freien Raume findet also statt, wenn die Bewegung der Luft am Orte einer Knotenfläche mitgetheilt wird. Die Stärke der Schallwellen wird dabei sehr gross, aber keineswegs unendlich. Denn damit der im Nenner der Werthe von A und M stehende $\cos k\alpha$ Null werde, müsste die Fläche der Oeffnung gleich Null werden. Dabei zeigt sich zugleich, dass die Resonanz sowohl in der Röhre als auch im freien Raume desto mächtiger wird, je enger die Oeffnung der Röhre ist. Wenn, wie gewöhnlich, $k\alpha$ klein ist, kann $\cos k\alpha = 1$ gesetzt werden. Dann ist die Wirkung im freien Raume unabhängig von der Form der Röhre. Die Vibrationen der Schwingungsmaxima in der Röhre und der um ganze Wellenlängen von der Oeffnung entfernten Wellen im freien Raume unterscheiden sich dabei von denen der mitgetheilten Bewegung um eine Viertel-Undulation.

Das Minimum der Resonanz tritt ein, wenn der Factor von A im Werthe von G in (15) sein Maximum erreicht, d. h. wenn

$$\cos k(l+\alpha)=\pm 1\,,\qquad k(l+\alpha)=\mathfrak{a}\pi\,;$$

dann wird mit Weglassung kleiner Grössen

$$G\cos k\alpha=A\,,\qquad \tau=\mathfrak{a}\pi\,,\qquad M=-\frac{QG\cos k\alpha}{2\pi}\,.$$

[47] Die Wirkung im freien Raume ist also, je nach dem Werthe von α, gleich oder kleiner, als wenn gar keine Röhre vorhanden wäre, und die erschütterte Schlussplatte der Röhre einen Theil der übrigens festen yz-Ebene bildete.

Die grosse Verschiedenheit der Schallstärke in der Luft bei gleicher Excursionsweite der schwingenden Endplatte der Röhre, von der die Wellen erregt werden, kann überraschen. Sie beruht darauf, dass, wenn auch die Excursion der Schwingungen dieselbe bleibt, doch die Arbeit, die die schwingende Platte durch die Bewegung der Luft leistet, eine ausserordentlich verschiedene ist, je nachdem sie gegen verdichtete oder nicht verdichtete Luft sich vorwärts bewegen muss. Bei stärkster Resonanz findet am Ende der Röhre auch der stärkste Wechsel von Verdichtung und Verdünnung statt.

Gehen wir jetzt über zu dem anderen Falle, wo der Schall im freien Raume in grösserer Entfernung von der Oeffnung der Röhre erregt wird, letztere aber an der Stelle $x = -l$ fest geschlossen ist. Da die in dem tönenden Punkte, dessen Coordinaten α, β, γ seien, erregten Wellen von der festen yz-Ebene reflectirt werden, müssen wir uns die Bewegung im freien Raume zusammengesetzt denken aus den Wellen, welche der tönende Punkt erregt, und denen, welche sein Spiegelbild, dessen Coordinaten $-\alpha$, β, γ sind, erregen würde. Setzen wir das Geschwindigkeitspotential Φ dieser Bewegung auf Seite der positiven x im freien Raume

$$(16)\quad \Phi = H\left[\frac{\cos(kr_{,} - 2\pi n t + c)}{r_{,}} + \frac{\cos(kr_{,,} - 2\pi n t + c)}{r_{,,}}\right],$$

wo $r_{,}$ die Entfernung vom Punkte α, β, γ und $r_{,,}$ die von seinem Spiegelbilde $-\alpha$, β, γ bedeutet, so ist an der ganzen yz-Ebene[19])

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0\,.$$

Ist der tönende Punkt weit von der Oeffnung der Röhre entfernt und diese klein gegen die Wellenlänge, so können wir die kleinen Verschiedenheiten des Werthes von Φ in verschiedenen Punkten der Oeffnung vernachlässigen und hier setzen:

$$\overline{\Phi} = G\cos(2\pi n t + \tau_{,,})\,,$$

wo

$$G = \frac{2H}{r_{,}}\,,$$

$$\operatorname{tang} \tau_{,,} = -\operatorname{tang}(kr_{,} + c)\,.$$

[48] Innerhalb der Röhre setzen wir dann:

$$(16^a) \qquad \Phi = G \cos kx \cos(2\pi nt + \tau_{\prime\prime}) .$$

Dann ist Φ an der Oeffnung continuirlich und $\frac{d\Phi}{dx}$ innen und aussen eben da gleich Null. Innerhalb der Röhre können wir bei dieser Annahme $\frac{d\Phi}{dn} = 0$ setzen, indem wir die verschwindend kleinen Werthe, welche es am nicht cylindrischen Theile der Röhre annimmt, vernachlässigen. Nur am verschlossenen Ende ist $\frac{d\Phi}{dx}$ im Allgemeinen nicht gleich Null. Hier müssen wir setzen:

$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} = 0$$

und das Geschwindigkeitspotential im ganzen Raume gleich $\Phi + \Psi$, wo Ψ das von uns früher bestimmte Bewegungspotential der ebenen Wellen in der Röhre, die in den freien Raum übergehen, ist[37]). Dadurch ist allen Bedingungen der Aufgabe genügt. Wir haben also für $x = -l$:

$$(16^b) \quad -kG \sin kl \cos(2\pi nt + \tau_{\prime\prime}) = J \cos(2\pi nt + \tau) ,$$

also

$$(16^c) \begin{cases} \tau_{\prime\prime} = \tau + \pi , \\ kG \sin kl = J = A \sqrt{\frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 kl} . \end{cases}$$

Das Minimum von A bei gleichen Werthen von G tritt offenbar ein, wenn $\sin kl = 0$; dann wird $A = 0$, und die Bewegung im freien Raume so, als wäre die Mündung der Röhre gar nicht in der yz-Ebene vorhanden. Das Maximum aber tritt ein, wenn $\cos k(l + \alpha) = 0$; dann wird:

$$A = G \cdot \frac{2\pi}{kQ} ,$$

und wieder wird beim Maximum der Resonanz der Phasenunterschied von einer Viertel-Undulation zwischen den erregenden Wellen und den erregten eintreten[37a]). Das Maximum der Resonanz in der an einem Ende geschlossenen Röhre tritt also in beiden Fällen, sowohl wenn der Schall vom geschlossenen, als wenn er vom offenen Ende her der Luft der

Röhre mitgetheilt wird, ein, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist. Aus dem Reciprocitätsgesetz des Schalles, welches in (9^a) ausgesprochen ist, lässt sich nun dasselbe Gesetz auch für jede andere Lage des tönenden Punktes ableiten. Es passt auf unseren Fall direct die Form, welche wir dem Gesetz in (9^c) gegeben haben. Die dortige Constante A, **[49]** welche der Intensität des tönenden Punktes b entspricht, indem dort Φ unendlich wird, wie

$$\Phi = A \frac{\cos k r_b}{r_b} \cos(2\pi n t),$$

wollen wir gleich 1 setzen. Der Werth von $\frac{d\Psi}{dn}$ ist in (9^c) an der erschütterten Stelle da der Wand gleichgesetzt worden:

$$\frac{d\Psi_a}{dn} = B \cos(2\pi n t).$$

Am Grunde der Röhre ist $\frac{d\Psi_a}{dn} = \frac{d\Psi_a}{dx}$, und in dem Falle, wo der Boden der Röhre erschüttert wird, von uns in den Gleichungen (15) und (15^a) gesetzt worden:

$$\frac{d\Psi_a}{dx} = G \cos(2\pi n t + \tau_{,,});$$

wir haben also die Constante B der Gleichung (9^c) mit G zu vertauschen und im Ausdrucke für Ψ statt $2\pi n t$ zu schreiben $2\pi n t - \tau_{,,}$. Ausserdem ist in dem Falle unserer Anwendung nicht bloss ein einziges Flächenelement da erschüttert worden, sondern der ganze Boden der Röhre; wir müssen also über diesen integriren, und erhalten so:

$$(17) \qquad 4\pi \Psi_b = - G \int \Phi_a \, d\omega,$$

wo die Integration über den Boden der Röhre auszudehnen ist. Ist nun der tönende Punkt vom Boden der Röhre nur weit genug entfernt, dass hier ebene stehende Wellen entstehen können, also Φ hier von der Form ist:

$$\Phi = f \cos k(l + x) \cos(2\pi n t + c),$$

so wird aus (17) [38]):

$$4\pi\Psi_b = -fGQ\cos(2\pi nt + c),$$

$$4\pi[\Psi_b'\cos(2\pi nt - \tau_{\prime\prime}) + \Psi_b''\sin(2\pi nt - \tau_{\prime\prime})] = -fGQ\cos(2\pi nt + c),$$

$$(17^a)\begin{cases}4\pi(\Psi_b'\cos\tau_{\prime\prime} - \Psi_b''\sin\tau_{\prime\prime}) = -fGQ\cos c, \\ 4\pi(\Psi_b'\sin\tau_{\prime\prime} + \Psi_b''\cos\tau_{\prime\prime}) = fGQ\sin c,\end{cases}$$

$$4\pi\sqrt{(\Psi_b')^2 + (\Psi_b'')^2} = fGQ.$$

Nun ist der Werth der Functionen Ψ' und Ψ'' für jeden Punkt b proportional der in den Gleichungen (10) bis (16) vorkommenden Constanten A, deren Verhältniss zu G für eine bestimmte Röhrenlänge gegeben ist in Gleichung (15). Also ist bei wechselnder Röhrenlänge auch f proportional dem Verhältniss $\frac{A}{G}\cdot$ [50] Dies Verhältniss wird, wie aus (15) hervorgeht, ein Maximum, wenn

$$l + \alpha = (2a + 1)\tfrac{1}{4}\lambda.$$

Daraus folgt also, dass auch bei einer beliebigen Lage des tönenden Punktes die ebenen Wellen im Innern der Röhre, wenn dergleichen überhaupt entstehen, das Maximum ihrer Intensität erreichen, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist.

Die ebenen Wellen im Innern einer an beiden Seiten offenen Röhre lassen sich mittelst der aufgestellten Probleme behandeln, wenn die Mündungen der Röhre nach der von uns gemachten Annahme in zwei parallelen festen Ebenen liegen, die den Luftraum in zwei Theile trennen, und der Schall auf der einen Seite von einem weit entfernten tönenden Punkte ausgeht. Auf der einen Seite dieser Wand [38a]) setzt man das Geschwindigkeitspotential gleich der in den Gleichungen (10) bis (12) gebrauchten Function Ψ, auf der anderen Seite gleich der in den Gleichungen (16) bis (16^c) vorkommenden Form $\Phi + \Psi$, welche der Resonanz einer Röhre entspricht, in welche der Schall von der offenen Mündung eintritt. Man hat dann nur die Coefficienten der ebenen Wellen in der Röhre in diesen beiden Ausdrücken des Geschwindigkeitspotentials so zu bestimmen, dass hier beide Functionen identisch werden. Da das weiter keine Schwierigkeiten macht, möge das Gesagte genügen. Die Resonanz in der Röhre wird

am stärksten, wenn die reducirte Länge der Röhre, an welcher man die Correctionen für beide Mündungen anzubringen hat, ein Vielfaches der halben Wellenlänge ist.

§ 8.

Reducirte Länge verschiedener Röhrenformen.

Wir wollen schliesslich noch eine Reihe von Röhrenformen aufsuchen, für welche mit den bis jetzt bereiten Hülfsmitteln der Analysis sich die Luftbewegung in der Mündung und die reducirte Länge vollständig wenigstens für Schallwellen von so grosser Wellenlänge bestimmen lässt, dass gegen diese die Dimensionen der Röhrenöffnung, ihres Querschnitts und des von der Cylindergestalt abweichenden Theiles der Mündung verschwinden. Die Wand der Röhre sei übrigens eine Rotationsfläche, welche in kleiner Entfernung von der kreisförmigen Mündung, deren Radius R sei, übergeht in einen Cylinder von kreisförmigem Querschnitt, dessen Radius wir R_1 nennen wollen. Wir setzen ferner voraus, dass auch die Bewegung der Luft überall symmetrisch um die Axe der Röhre vor sich gehe. Wir können nun im [51] Allgemeinen nicht so zu Werke gehen, dass wir eine bestimmte Röhrenform annehmen und dazu die Potentiale der Bewegung suchen, sondern wir müssen umgekehrt von der Potentialfunction ausgehen und die dazu gehörige Röhrenform bestimmen, was sich in jedem Falle ausführen lässt. Nur müssen wir eben solche Formen der Potentialfunction suchen, welche Röhren geben, die in kleiner Entfernung von der Mündung in Cylinder übergehen.

Dem Bewegungspotentiale der Luft haben wir die Form gegeben:

$$\Psi = \Psi' \cos(2\pi n t) + \Psi'' \sin(2\pi n t).$$

Für die tieferen Theile der Röhre haben wir in (12^g) gefunden:

$$(12^k) \qquad \Psi'' = -\frac{AkQ}{2\pi} \cos kx.$$

Im freien Raume ist aber, wenn wir $\frac{d\overline{\Psi''}}{dx} = 0$ setzen[39], welches, wie wir oben schon gefunden haben, mit k verschwindet, nach (11^d):

$$\Psi'' = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\sin kr_{,}}{r_{,}} d\omega,$$

welches innerhalb der Mündung, wo wir kr, verschwinden lassen dürfen, wird:

$$(12^l) \qquad \overline{\Psi''} = -\frac{k}{2\pi}\int\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\,d\omega = -\frac{AkQ}{2\pi}.$$

Sowohl (12^k) wie (12^l) giebt innerhalb der Mündung den gleichen Werth von $\overline{\Psi''}$ und den Werth Null für $\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}$. Sie gehen also an der Mündung der Röhre continuirlich in einander über. Längs der festen Wände des Luftraumes geben beide $\frac{d\Psi''}{dn} = 0$, nur an dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand wird dieser Differentialquotient nicht genau Null, aber verschwindend klein. Es ist also Ψ'' unter dieser Annahme eine continuirliche Function, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet, und kann unmittelbar berechnet werden, nachdem Ψ' gefunden ist.

Die Function Ψ' hat im freien Raume die Form:

$$(18) \qquad \begin{cases} \Psi' = \int h\,\frac{\cos kr}{r}\,d\omega\,, \\ \text{wo} \quad h = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\,. \end{cases}$$

Im Innern der Röhre werden wir ihr eine andere analytische Form Ψ_i geben müssen, welche die Eigenschaft haben muss:

1) Im Innern der Röhre die Bedingung zu erfüllen:

$$(18^a) \qquad \nabla\Psi_i + k^2\Psi_i = 0\,,$$

[52] 2) für grosse negative Werthe von x folgende Form anzunehmen:

$$(18^b) \qquad \Psi_i = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\,,$$

3) an der Fläche der Oeffnung den Bedingungen zu genügen:

$$(18^c) \qquad \overline{\Psi_i} = \overline{\Psi'} \quad \text{und} \quad \frac{d\overline{\Psi_i}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} = -2\pi h\,.$$

Dann wird die Form der Röhre gefunden durch die Bedingung, dass an der Wand

$$(18^d) \qquad \frac{d\Psi_i}{dn} = 0\,,$$

welche Form aber noch der Bedingung genügen muss, dass nur für solche Werthe von x, welche gegen die Wellenlänge λ verschwindend klein sind, die Fläche eine merkliche Neigung gegen die x-Axe haben darf, weil wir vorher auch

$$\frac{d \cos kx}{dn} = 0$$

gesetzt haben längs der ganzen Ausdehnung der Röhrenwand, und weil nur unter dieser Bedingung die Form der Röhrenwand von der Wellenlänge unabhängig gefunden wird. Indem wir setzen:

$$\varrho \cos \omega = y, \qquad \varrho \sin \omega = z,$$

und berücksichtigen, dass nach der Voraussetzung Ψ nur eine Function von ϱ und x, nicht von ω sein soll, wird Gleichung (18^a):

$$(18^e) \qquad \frac{d^2 \Psi_i}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi_i}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho} + k^2 \Psi_i = 0.$$

Wir setzen[40]):

$$(19) \qquad \Phi = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx + \Sigma \left[E_m e^{+x\sqrt{m^2 - k^2}} U_{(m\varrho)}\right],$$

wo E_m beliebige Constanten, $U_{(m\varrho)}$ folgende Function bedeutet:

$$(19^a) \quad U_{(m\varrho)} = 1 - \frac{m^2\varrho^2}{2.2} + \frac{m^4\varrho^4}{2.2.4.4} - \frac{m^6\varrho^6}{2.2.4.4.6.6} \text{ u. s. w.},$$

und unter dem Summenzeichen für m diejenigen Werthe zu setzen sind, welche $\frac{dU_{(m\varrho)}}{d\varrho} = 0$ machen, wenn $\varrho = R_1$. Dann ist Φ eine Function, welche der Differentialgleichung (18^e) Genüge leistet und an der Wand einer cylindrischen Röhre vom Radius R_1 auch der Bedingung genügt, dass $\frac{d\Phi}{dn} = 0$. In dem Exponenten von e muss der Wurzel immer das positive Vorzeichen gegeben werden, wenn die Röhre unendlich lang ist, damit Φ für unendliche negative x endlich bleibt. Ist die Röhre aber irgendwo abgeschlossen, so sind [53] auch negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen, und die Coefficienten derselben so zu bestimmen, dass die Grenzbedingungen an dem geschlossenen Ende erfüllt werden. Da übrigens der

kleinste Werth von mR_1, der die Bedingung $\frac{dU}{d\varrho} = 0$ für $\varrho = R_1$ erfüllt, 3,83171, der zweite 7,01751 ist, während die folgenden sich allmählich der Grösse $(a + \frac{1}{4})\pi$ nähern, so nehmen alle diese Exponentialfunctionen schnell ab, wenn man sich von dem Ende der Röhre entfernt, an welchem sie einen merklichen Werth haben, und so oft die Länge der Röhre beträchtlich gross gegen den Durchmesser ist, werden sie in der Mitte oder am anderen Ende derselben zu vernachlässigen sein. Es wird also im Allgemeinen genügen, dass wir uns auf die Glieder beschränken, für welche die Wurzel im Exponenten ein positives Vorzeichen hat[41]. Da übrigens mR_1 nach dem Gesagten eine endliche, kR_1 aber eine verschwindend kleine Zahl ist, so können wir in dem Exponenten k^2 gegen m^2 vernachlässigen und setzen

$$(19^b) \qquad \Phi = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx + \Sigma\{E_m e^{mx} U_{(m\varrho)}\}.$$

Diese Function erfüllt also allerdings die Forderung der Gleichungen (18^a) und (18^b), welche wir oben für die Function Ψ_i aufgestellt haben, sie wird aber im Allgemeinen nicht der dritten Bedingung (18^c) entsprechen, dass, wenn wir setzen:

$$\frac{d\overline{\Phi}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi'}}{dx},$$

auch sei:

$$\overline{\Phi} = \overline{\Psi'} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\cos kr}{r} d\omega,$$

oder, da innerhalb der Oeffnung kr unendlich klein ist, kann man diese Bedingung auch darauf reduciren, dass sein müsste:

$$\overline{\Phi} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Phi}}{dx} \frac{d\omega}{r}.$$

Wäre diese letztere Bedingung durch besondere Annahmen über die Grösse der Coefficienten erfüllt, so würde die Gestalt der Röhre einfach cylindrisch sein. Ich habe aber keine Methode finden können, um die Coefficienten dieser Bedingung gemäss zu bestimmen und somit die Aufgabe für ganz cylindrische Röhren streng zu lösen. Auch lässt sich einsehen, dass die Convergenz der Reihe für Φ in Gleichung (19) für

diesen Fall eine sehr langsame sein würde, da die Geschwindigkeit der Lufttheilchen $\frac{d\Phi}{dx}$ am Rande der Oeffnung, die durch eine scharfe rechtwinklige Kante begrenzt sein würde, unendlich [54] gross wie $(R - \varrho)^{-\frac{1}{3}}$ werden müsste, und daher die Reihe für $\frac{d\Phi}{dx}$ für den Werth $\varrho = R$ und $x = 0$ überhaupt nicht convergiren kann[42]).

Wir fügen deshalb zu Φ noch eine andere Function hinzu, die in grösserer Entfernung von der Oeffnung verschwindet, also auch nur in der Nähe der Oeffnung Einfluss auf die Gestalt der Röhre ausübt, aber die Continuität an der Oeffnung herstellt[43]).

Bezeichnen wir der Einfachheit wegen die Potentialfunction einer auf der Kreisfläche der Oeffnung mit der Dichtigkeit h verbreiteten Masse mit P_h, also

$$(20) \qquad P_h = \int h \frac{\cos kr}{r} d\omega ,$$

dieses Integral über die ganze Fläche der Oeffnung genommen. Wenn die Distanz des Punktes, für welchen wir P_h bestimmen, von der Oeffnung klein ist, so ist $\cos kr = 1$ und

$$(20^a) \qquad P_h = \int \frac{h\, d\omega}{r} .$$

Setzen wir ferner

$$(21) \qquad h = i + l ,$$

$$(21^a) \qquad i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\overline{\Phi}}{dx} ,$$

und bestimmen wir l so, dass in der Fläche der Oeffnung

$$(21^b) \qquad \overline{P_l} = \tfrac{1}{2} \overline{\Phi} ,$$

was sich immer ausführen lässt, weil die Vertheilung einer Masse auf einer Kreisscheibe, die an der Oberfläche dieser Scheibe eine Potentialfunction von gegebener Grösse giebt, nach bekannten Methoden gefunden werden kann. Setzen wir ferner auf Seite der positiven x, wie schon oben geschehen:

$$(21^c) \qquad \Psi' = P_h = P_i + P_l$$

in der Röhre, also für negative x:

$$(21^d) \qquad \Psi_i = \Phi + P_i - P_l,$$

so genügen die Functionen Ψ' und Ψ_i allen für sie gestellten Bedingungen. Dass nämlich Ψ' im freien Raume und Ψ_i im Innern der Röhre der Bedingung genügen:

$$(18^a) \qquad \nabla\Psi + k^2\Psi = 0,$$

ist aus der Bildungsweise dieser Functionen klar. Dass Ψ_i für grosse Werthe [55] von $-x$ übergeht in

$$\Psi_i = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx,$$

erhellt daraus, dass P_i und P_l in einer gegen die Oeffnung der Röhre grossen Entfernung unendlich klein werden, Φ aber wirklich in jene Form übergeht. Da ferner in der Fläche der Oeffnung

$$(21^b) \qquad \overline{P_l} = \tfrac{1}{2}\overline{\Phi},$$

wird

$$(21^c) \qquad \overline{\Psi'} = \overline{\Psi_i} = \overline{P_i} + \overline{P_l}.$$

Da ferner an der Fläche der Oeffnung

$$\frac{dP_i}{dn} = -2\pi i = \frac{1}{2}\frac{d\overline{\Phi}}{dx}$$

und auf Seite der positiven x

$$\frac{dP}{dn} = \frac{dP}{dx},$$

auf Seite der negativen aber

$$\frac{dP}{dn} = -\frac{d\overline{P}}{dx},$$

so ist

$$(21^f) \qquad \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi_i}}{dx} = \frac{dP_i}{dn} + \frac{dP_l}{dn} = -2\pi(i + l).$$

Somit sind die gestellten Bedingungen (18^a), (18^b) und (18^c) erfüllt.

Die Form der Röhrenwand wird endlich durch die Gleichung gegeben:

$$(18^d) \qquad \frac{d\Psi_i}{dn} = 0.$$

Da wir die Bedingung gemacht haben, dass, wenn r eine innerhalb des nicht cylindrischen Theiles der Röhre liegende Entfernung ist, $k^2 r^2$ gegen 1 zu vernachlässigen sei, können wir, entsprechend der zur Gleichung (7^d) gemachten Bemerkung, in dieser Gleichung der Röhrenwand $k = 0$ setzen, werden dann aber natürlich auch die Aufgabe nur für solche Werthe von k als gelöst betrachten dürfen, für welche diese Bedingung erfüllt ist. Dann ist also für diesen Zweck in der Nähe der Röhrenmündung zu setzen statt (19^b):

$$(22) \qquad \Phi = Ax + B + \Sigma\{E_m e^{mx} U_{(m\varrho)}\},$$

$$(20^a) \qquad P_i = \int \frac{i\,d\omega}{r}, \qquad P_l = \int \frac{l\,d\omega}{r},$$

$$(21^d),\ (21^b) \qquad i = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{\Phi}}{dx}, \quad \overline{P_l} = \tfrac{1}{2}\overline{\Phi},$$

$$(21^d) \qquad \Psi_i = \Phi + P_i - P_l.$$

[**56**] In der That sind dann auch alle diese Functionen von einer solchen Form, dass sich ihr Werth in der Nähe der Mündung nicht ändert dadurch, dass man $k = 0$ setzt. Die Bedingung (18^d) ergiebt[44]), dass die Röhrenwand eine zu allen Flächen, deren Gleichung $\Psi_i =$ Const. ist, orthogonale Rotationsfläche sein muss, oder wenn wir die Gleichung der Röhrenwand (und überhaupt der Strömungscurven) ausdrücken durch

$$\varrho\chi = \text{Const.},$$

so muss sein:

$$(22^a) \qquad \frac{d\Psi_i}{dx}\frac{d(\varrho\chi)}{dx} + \frac{d\Psi_i}{d\varrho}\frac{d(\varrho\chi)}{d\varrho} = 0.$$

Zu bemerken ist noch, dass man, um die Form der Function Φ festzustellen, die Grösse des Radius des cylindrischen Theiles der Röhre R_1 bestimmen muss, weil von dessen Grösse die in der Summe vorkommenden Werthe von m abhängen. Um P_i und P_l zu finden, muss wiederum die Grösse des Radius der Oeffnung R festgestellt sein, und schliesslich, wenn man die Röhrenform aus der Gleichung $\frac{d\Psi_i}{dn} = 0$ bestimmt, wird die Stromescurve, welche von dem Rande der Oeffnung ausgeht, nicht nothwendig in einen Cylinder vom Radius R_1 übergehen. Um dies nun zu

bewirken, muss man eine der Constanten von Φ durch die oben gefundene Gleichung

$$(12^b) \qquad AQ = -2\pi M$$

bestimmen, worin in unserem Falle Q der Querschnitt der Röhre

$$Q = \pi R_1^2,$$

$$M = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega = \int (i + l)\, d\omega.$$

Daraus folgt:

$$(22^b) \qquad AR_1^2 = -2\int (i + l)\, d\omega.$$

Wenn R und R_1 gegeben sind, giebt diese Gleichung eine Bedingung, welche durch die Coefficienten des Ausdrucks für Φ in (22) erfüllt werden muss, so dass einer von ihnen durch die anderen bestimmt werden kann.

§ 9.

Einfachste Röhrenformen.

Wir wollen endlich noch die Röhrenformen berechnen, welche den einfachsten Annahmen über die Function Φ entsprechen. Setzen wir

$$(23) \qquad \Phi = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx,$$

[57] so wird nach (21^a):

$$(23^a) \qquad i = -\frac{A}{4\pi}, \quad \int i\, d\omega = -\tfrac{1}{4} AR^2,$$

und in der Ebene der Mündung nach (21^b):

$$(23^b) \qquad \overline{P_l} = \tfrac{1}{2} B,$$

woraus nach bekannten Sätzen über Elektricitätsvertheilung auf einer leitenden Kreisscheibe folgt[45], dass

$$(23^c) \qquad l = \frac{B}{2\pi^2 \sqrt{R^2 - \varrho^2}}, \quad \int l\, d\omega = \frac{BR}{\pi}.$$

Somit folgt aus Gleichung (22^b):

$$(23^d) \qquad AR_1^2 = \tfrac{1}{2} AR^2 - \frac{2}{\pi} BR.$$

Den Unterschied α der wahren und reducirten Röhrenlänge haben wir oben (12^a) definirt durch die Gleichung:

$$(12^f) \qquad -\frac{kB}{A} = \operatorname{tang} k\alpha .$$

Da $k\alpha$ eine sehr kleine Grösse ist[46]), so oft das Verhältniss $R_1 : R$ endlich ist, können wir in diesem Falle annähernd setzen:

$$(23^e) \qquad \alpha = -\frac{B}{A} = \frac{\pi}{2}\frac{R_1^2}{R} - \frac{\pi}{4} R ,$$

wodurch für die hier in Betracht kommenden Röhrenformen der Unterschied zwischen wahrer und reducirter Länge gegeben ist, wenn die Radien des Cylinders und seiner Mündung bestimmt sind. Die reducirte Länge der Pfeife ist gleich der wahren, also $\alpha = B = 0$, wenn $R = R_1 \sqrt{2}$.

Wenn die Mündung ebenso weit ist wie der Cylinder, also $R = R_1$, wird $\alpha = \frac{\pi}{4} R$ und $B = -\frac{\pi}{4} RA$. Wenn R sehr klein gegen R_1 ist, wird annähernd

$$\frac{B}{A} = -\frac{\pi R_1^2}{2R} = -\frac{Q}{2R},$$

wie es schon oben für diesen Fall in (12^i) gefunden ist. Unter diesen Umständen kann natürlich nicht die abgekürzte Form (23^e) für die Gleichung (12^f) angewendet werden.

Die Bedeutung der Function χ der Gleichung (22^a), welche zur Bestimmung der Strömungscurven dient, setzen wir durch folgende Gleichung fest[47]):

$$(24) \qquad \varrho\chi = \int_0^\varrho \frac{d\Psi_i}{dx} \varrho \, d\varrho ,$$

[58] worin unter dem Integralzeichen x einen constanten Werth behält. Daraus folgt zunächst:

$$(24^a) \qquad \frac{d}{d\varrho}(\varrho\chi) = \varrho \frac{d\Psi_i}{dx} ,$$

$$\frac{d}{dx}(\varrho\chi) = \int_0^\varrho \frac{d^2\Psi_i}{dx^2} \varrho \, d\varrho .$$

Da wir nun für unseren jetzt vorliegenden Zweck uns erlauben durften, in den Functionen Φ, P_i und P_l (s. (22) und

(20ª)), aus denen Ψ_i zusammengesetzt ist, $k = 0$ zu setzen, so reducirt sich die Gleichung (18ᵉ) in der Nähe der Mündung auf:

$$\frac{d^2 \Psi_i}{dx^2} = -\frac{d^2 \Psi_i}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho},$$

und wir erhalten also:

$$\frac{d}{dx}(\varrho\chi) = -\int_0^\varrho \left(\varrho \frac{d^2\Psi_i}{d\varrho^2} + \frac{d\Psi_i}{d\varrho}\right) d\varrho,$$

$$(24^b) \qquad \frac{d}{dx}(\varrho\chi) = -\varrho\frac{d\Psi_i}{d\varrho};$$

aus (24ª) und (24ᵇ) folgt, dass die Function χ der Bedingung genügt:

$$(22^a) \qquad \frac{d(\varrho\chi)}{d\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho} + \frac{d(\varrho\chi)}{dx}\frac{d\Psi_i}{dx} = 0,$$

und dass in einer durch die x-Axe gelegten Ebene die Curven

$$\varrho\chi = \text{Const.}$$

orthogonal sind zu den Curven

$$\Psi_i = \text{Const.},$$

erstere also Stromescurven sind.

Wenn wir in die Gleichung (24) für Ψ_i setzen:

$$(21^d) \qquad \Psi_i = \Phi + P_i - P_l,$$

so können wir auch χ ähnlich zerfällen:

$$(25) \qquad \chi = \chi_0 + \chi_{\prime} - \chi_{\prime\prime},$$

$$(25^a) \qquad \begin{cases} \varrho\chi_0 = \int_0^\varrho \frac{d\Phi}{dx}\varrho\, d\varrho, \\ \varrho\chi_{\prime} = \int_0^\varrho \frac{dP_i}{dx}\varrho\, d\varrho, \\ \varrho\chi_{\prime\prime} = \int_0^\varrho \frac{dP_l}{dx}\varrho\, d\varrho. \end{cases}$$

Da sich Φ hier reducirt auf

$$\Phi = Ax + B,$$

[59] so ist

$$(25^b) \qquad \chi_0 = \tfrac{1}{2} A \varrho .$$

Um die Berechnung von $\chi_{,}$ abzukürzen, bemerke ich Folgendes. Es sei W eine Potentialfunction, die auf Seite der negativen x der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{d^2 W}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dW}{d\varrho} = 0,$$

und ferner sei

$$(25^c) \qquad P_i = \frac{dW}{dx},$$

so ist

$$(25^d) \quad \varrho\chi_{,} = \int_0^\varrho \frac{d^2 W}{dx^2}\varrho\, d\varrho = -\int_0^\varrho \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\frac{dW}{d\varrho}\right)d\varrho = -\varrho\frac{dW}{d\varrho}.$$

Nun ist P_i die Potentialfunction einer Masse, die mit der constanten Dichtigkeit $-\frac{A}{4\pi}$ auf einer Kreisscheibe vom Radius R ausgebreitet ist. Die Gleichung (25^c) erfüllen wir, wenn wir W zur Potentialfunction eines soliden Cylinders machen, dessen Basis die kreisförmige Röhrenmündung ist, und der von $x = 0$ bis $x = +\infty$ reicht und mit Masse von der constanten Dichtigkeit $-\frac{A}{4\pi}$ gefüllt ist. Man braucht sich nur den Cylinder um ein unendlich kleines Stück in der Richtung der positiven x verschoben zu denken und die neue Masse so wie die neue Potentialfunction von der früheren abzuziehen, so erhält man das angegebene Resultat[48]. Die Gleichung (25^d) kann man aber schreiben, weil $y = \varrho \cos \omega$:

$$(25^e) \qquad \chi_{,} \cos\omega = -\frac{dW}{d\varrho}\cos\omega = -\frac{dW}{dy}.$$

Es ist aber $-\frac{dW}{dy}$ die Potentialfunction der Oberfläche des Cylinders, die mit Masse von der Dichtigkeit $-\frac{A}{4\pi}\cos\omega$ bedeckt ist, wie sich wieder leicht ergiebt, wenn man den

Cylinder in Richtung der negativen y unendlich wenig verschoben denkt. Also lässt sich $\chi_{,}$ unmittelbar finden:

$$(26)\quad \chi_{,} = -\frac{A}{4\pi}\int_0^\infty da \int_0^{2\pi} \frac{R\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{(x-a)^2+(\varrho-R\cos\omega)^2+R^2\sin^2\omega}}.$$

Der Werth, mit Hülfe elliptischer Integrale ausgedrückt, ist folgender[49]:

$$(26^a)\quad \chi_{,} = \frac{AR}{\pi}\left\{\frac{\varkappa_{,}\cos\vartheta}{\varkappa^2\sqrt{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\vartheta}}(K-E)\right.$$

$$\left. - \frac{\varkappa_{,}\sin\vartheta}{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\vartheta}\left[\tfrac{1}{2}\pi + (K-E)F'_\vartheta - KE'_\vartheta\right]\right\} - c,$$

[60] worin gesetzt ist:

$$\varkappa^2 = \frac{4R\varrho}{x^2+(R+\varrho)^2}, \quad \varkappa_{,}^2 = 1-\varkappa^2, \quad \varkappa_{,}\sin\vartheta = \pm\frac{R-\varrho}{R+\varrho}$$

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}}, \qquad E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}\, d\omega,$$

$$F'_\vartheta = \int_0^\vartheta \frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\omega}}, \qquad E'_\vartheta = \int_0^\vartheta \sqrt{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\omega}\, d\omega,$$

$$c = \frac{AR^2}{4\varrho}, \quad \text{wenn} \quad \varrho > R,$$

$$c = \frac{A\varrho}{4}, \quad \text{wenn} \quad R > \varrho,$$

oder in beiden Fällen:

$$c = \frac{AR}{4}\,\frac{1-\varkappa_{,}\sin\vartheta}{1+\varkappa_{,}\sin\vartheta}.$$

Uebrigens ist für $\sin\vartheta$, für $\cos\vartheta$, wie für $\varkappa_{,}$ immer der positive Werth zu nehmen, der sich aus den obigen Formeln ergiebt.

Endlich ergiebt sich $\chi_{,,}$ leicht aus den bekannten Sätzen über Potentialfunctionen, die durch elliptische Coordinaten ausgedrückt sind. Setzen wir

$$x = R\mu s,$$

$$\varrho = R\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1+s^2},$$

so ist die Potentialfunction P_l einer Scheibe, auf welcher selbst die Potentialfunction constant gleich $\frac{1}{2} B$ ist[50]):

$$P_l = \frac{B}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{s} \cdot$$

Die Linien $\mu = C$ sind confocale Hyperbeln und orthogonal gegen die Linien $s = C$, welche confocale Ellipsen sind. Da die letzteren in unserem Falle Curven gleichen Potentials sind, sind die Linien $\mu = C$ Strömungscurven, und wir brauchen die Grösse $\varrho \chi_{\prime\prime}$ nur für den Scheitelpunkt derselben in der Scheibe zu bestimmen, so muss sie denselben Werth in der ganzen Länge haben.

An der Scheibe selbst wird $s = 0$, für sehr kleine Werthe von s und negative x wird:

$$-\mu = \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2}}, \qquad s = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}},$$

$$P_l = -\frac{B}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{R^2 - \varrho^2}}{x},$$

$$\frac{d\overline{P_l}}{dx} = +\frac{B}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}},$$

[61] (27) $$\varrho \chi_{\prime\prime} = \int_0^\varrho \frac{d\overline{P_l}}{dx} \varrho \, d\varrho = \frac{BR}{\pi} (1 + \mu).$$

Um μ in den bei den elliptischen Integralen gebrauchten Hülfsgrössen auszudrücken, dient, wenn ϑ für $\varrho > R$ negativ genommen wird, die Gleichung[51]):

$$-\mu = \sqrt{\frac{2\varkappa_{\prime}(1 + \sin\vartheta)}{(1 + \varkappa_{\prime})(1 + \varkappa_{\prime} \sin\vartheta)}}.$$

Somit haben wir denn in den Gleichungen (25^b), (26) und (27) die Werthe von χ_0, $\chi_{\prime}$ und $\chi_{\prime\prime}$, und die Gleichung der Strömungscurven wird:

$$\varrho(\chi_0 + \chi_{\prime} - \chi_{\prime\prime}) = \text{Const.}$$

Soll die Strömungscurve der Röhrenwand entsprechen, so muss sie durch den Rand der Oeffnung gehen, und die Constante ist:

$$\text{Const.} = \int_0^R \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \varrho \, d\varrho = \tfrac{1}{2} A R_1^2;$$

folglich wird die Gleichung der Röhrenwand:

$$(27^b) \qquad \varrho(\chi_0 + \chi_{,} - \chi_{,,}) = \tfrac{1}{2} A R_1^2 .$$

Um die Röhrenform zu erhalten, für welche die Differenz zwischen der wahren und reducirten Länge verschwindet, müssen wir $B = 0$, $R = R_1 \sqrt{2}$ setzen, dann verschwindet auch $\chi_{,,}$, und die Gleichung der Röhrenwand reducirt sich auf:

$$\varrho \chi_{,} = \tfrac{1}{2} A (R_1^2 - \varrho^2) .$$

Es giebt dies eine Röhre mit trompetenförmigem, schwach erweitertem Ende. Die Krümmung der Wand ist überall nach innen convex, und ihr Krümmungshalbmesser, der vom cylindrischen Theile an gegen die Mündung allmählich abnimmt, wird am Rande der Oeffnung zuletzt unendlich klein.

Macht man den Radius der Oeffnung gleich dem der Röhre, so nähert sich die Form der Röhre am meisten einem reinen Cylinder. Es wird dann die Differenz zwischen der reducirten und wahren Länge der Röhre, wie schon oben bemerkt, gleich $\frac{1}{4} \pi R$. Da in diesem Falle die Grösse

$$\varkappa_{,}^2 \sin^2 \vartheta = \frac{(R - \varrho)^2}{(R + \varrho)^2}$$

immer sehr klein bleibt, und also auch $\sin \vartheta$ für alle nicht zu kleinen Werthe von $\varkappa_{,}$ sehr klein bleibt, kann man zur Berechnung der Röhrenform von $\varkappa = 0$ bis $\varkappa = \sin 89^0$ die höheren Potenzen als die erste von $\varkappa_{,} \sin \vartheta$ und als die zweite von $\sin \vartheta$ vernachlässigen. Die so vereinfachte Gleichung für die Röhrenwand, aus der man $\sin \vartheta$ für eine Reihe von Werthen von $\varkappa_{,}$ leicht [62] mit Hülfe der Tafeln von *Legendre* berechnen kann, ist[52]):

$$\begin{aligned} 0 = \frac{4\varkappa_{,}}{\pi \varkappa^2}(K - E) - \sqrt{\frac{2\varkappa_{,}}{1 + \varkappa_{,}}} \\ + \varkappa_{,} \sin \vartheta \left\{ \frac{8\varkappa_{,}}{\pi \varkappa^2}(K - E) + 6 + \frac{1 - \varkappa_{,}}{\sqrt{2\varkappa_{,}(1 + \varkappa_{,})}} \right\} \\ - \varkappa_{,} \sin^2 \vartheta \left\{ \frac{2}{\pi \varkappa^2}(K - E) - \frac{4E}{\pi} - \frac{1}{4\sqrt{2\varkappa_{,}(1 + \varkappa_{,})}} \right\} . \end{aligned}$$

Aus den zusammengehörigen Werthen von $\varkappa_{,}$ und ϑ lassen sich endlich x und ϱ berechnen, deren Werthe in diesem Falle sind[52a]):

$$\frac{\varrho - R}{R} = \frac{2\varkappa_, \sin\vartheta}{1 - \varkappa_, \sin\vartheta},$$

$$\frac{x}{R} = -\frac{2\varkappa_, \cos\vartheta}{\varkappa(1 - \varkappa_, \sin\vartheta)}.$$

In der folgenden Tabelle bedeutet demnach $\frac{\varrho - R}{R}$ den Abstand zwischen der Wand unserer Pfeifenform und der des Cylinders, ausgedrückt in Theilen des Radius, und ebenso $-\frac{x}{R}$ den Abstand der betreffenden Stelle von der Oeffnung, ausgedrückt in Theilen des Radius.

ang. sin $\varkappa_,$	ϑ	$\frac{\varrho - R}{R}$	$-\frac{x}{R}$
0°	90°	0	0
1°	26° 2′	0,0153	0,03161
2°	15° 42′	0,0187	0,06787
3°	10° 59′	0,0197	0,10392
4°	8° 14′	0,0198	0,13979
5°	6° 26′	0,0193	0,17556
6°	5° 9′	0,0186	0,21132
7°	4° 13′	0,0177	0,24708
8°	3° 30′	0,0168	0,28291
9°	2° 56′	0,0159	0,31888
10°	2° 29′	0,0149	0,35496
15°	1° 11′ 40″	0,0107	0,53867
20°	0° 37′ 50″	0,0075	0,73058
25°	0° 21′ 0″	0,0051	0,93502
30°	0° 12′ 0″	0,0035	1,15668

In grösserer Entfernung von der Scheibe findet man[53]:

$$\frac{\varrho - R}{R} = \frac{1}{32}\frac{R^4}{x^4}.$$

[63] Am schnellsten ändert die Curve ihre Natur dicht an der Oeffnung. Zwischen $\varkappa_, = 0$ und $\varkappa_, = \sin 1°$ kann man folgende annähernd richtige Gleichung brauchen[54]:

$$0 = \log\left(\frac{4}{\varkappa_{,}}\right) - 1 + \operatorname{tang}\vartheta(\tfrac{3}{2}\pi + \vartheta) - \frac{\pi}{4\sqrt{\varkappa_{,}}\sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\vartheta)}.$$

Wenn $\varkappa_{,}$ sehr klein wird, verschwindet $\log\varkappa_{,}$ gegen $\frac{1}{\sqrt{\varkappa_{,}}}$, und $\operatorname{tang}\vartheta$ muss sehr gross, ϑ nahe gleich $\frac{1}{2}\pi$ werden, dann ist:

$$0 = \operatorname{tang}\vartheta - \frac{1}{8\sqrt{\varkappa_{,}}},$$

oder

$$\frac{\varrho - R}{-x} = \frac{\sqrt{2R}}{8\sqrt[4]{(\varrho - R)^2 + x^2}},$$

oder, da x auch sehr klein gegen $\varrho - R$ werden muss,

$$(\varrho - R)^3 = \tfrac{1}{32}Rx^2.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt, dass die Wandfläche die verlängerte Ebene der Oeffnung an deren Rande tangirt und hier einen unendlich kleinen Krümmungshalbmesser hat.

§ 10.

Tonhöhe von Resonatoren.

Das verallgemeinerte Theorem von *Green* liefert uns auch einige allgemeine Gesetze der Schallbewegung für solche Hohlkörper, deren sämmtliche Dimensionen verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind, und die mit einer oder mehreren Oeffnungen versehen sind, deren Flächeninhalt sehr klein gegen die ganze Oberfläche des Hohlraumes ist. Da solche Hohlkörper mit kleinen Oeffnungen beim Anblasen oder durch Resonanz sehr tiefe Töne geben, so ist die erstere Bedingung für diese ihre tiefsten Töne immer erfüllt.

Wenn Ψ das Geschwindigkeitspotential im Innern des überall begrenzten Raumes S darstellt, der keine tönenden Punkte enthalten soll, und der Punkt α, β, γ, von welchem ab die Entfernung r gerechnet wird, innerhalb des Raumes S liegt, so ist nach (7^b):

$$\int \frac{\sin kr}{r}\frac{d\Psi}{dn}\,d\omega = \int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{\sin kr}{r}\right)d\omega.$$

Wenn nun alle Dimensionen des Raumes S gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, so können wir kr gegen 1

vernachlässigen, so oft r, wie hier der Fall ist, die Entfernung zweier Punkte, die innerhalb S gelegen sind, bezeichnet. Wir setzen also:

$$\frac{\sin kr}{r} = k - \frac{k^3 r^2}{2 \,.\, 3}.$$

[**64**] Dies, in die obige Gleichung eingeführt, giebt:

$$(28) \qquad \int \frac{d\Psi}{dn}\, d\omega = \frac{k^2}{2 \,.\, 3} \int \frac{d\Psi}{dn}\, r^2\, d\omega - \frac{k^2}{3} \int \Psi r \frac{dr}{dn}\, d\omega \,.$$

Nehmen wir jetzt an, der Raum S sei von einer festen Wand umgeben, in der nur eine oder einige Oeffnungen seien, an der festen Begrenzung sei überall $\frac{d\Psi}{dn} = 0$, in den sämmtlichen Oeffnungen aber habe $\frac{d\Psi}{dn}$ endliche positive Werthe. Das Verhältniss der Fläche sämmtlicher Oeffnungen zur ganzen Oberfläche des Raumes S sei $\eta^2 : 1$, und η eine verschwindend kleine Grösse, so ist das Integral $\int \frac{d\Psi}{dn}\, d\omega$ von derselben Ordnung kleiner Grössen wie η^2, das erste Integral rechts $\frac{k^2}{2 \,.\, 3} \int \frac{d\Psi}{dn}\, r^2\, d\omega$ aber von der Ordnung $k^2 r^2 \eta^2$, also zu vernachlässigen. Lassen wir nun k immer mehr sich der Null nähern, so muss dabei offenbar das Integral $\int \Psi r \frac{dr}{dn}\, d\omega$ und also auch die Function Ψ selbst immer grösser und grösser werden. Bezeichnen wir $k^2 \Psi$ mit χ, so würde χ eine Function sein, die bei abnehmendem k von constanter Grössenordnung bleibt, und in eine Function übergeht, welche der Differentialgleichung $\nabla \chi = 0$ in ganzer Ausdehnung des Raumes S genügt, und für welche an der ganzen Oberfläche des Raumes S $\frac{d\chi}{dn} = 0$. Daraus folgt nach den bekannten Sätzen über elektrische Potentialfunctionen, dass χ im ganzen Raume S constant sein müsse[55]).

Dem entsprechend wollen wir nun zeigen, dass, wenn die Dimensionen des Raumes S überall endlich sind, d. h. wenn man den Raum S nicht durch eine unendlich kleine Schnittfläche in zwei Theile von endlicher Grösse zerlegen kann, dass dann Ψ höchstens in unendlich kleinen Theilen

des Raumes S von der Ordnung η^2 sich um endliche Theile seiner Grösse von einer Constanten C unterscheiden könne. Wenn Ψ und seine ersten Differentialquotienten nämlich, wie es hier sein soll, innerhalb S überall continuirlich und eindeutig sind, so ist, wie bekannt:

$$\iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$
$$= -\int \Psi \frac{d\Psi}{dn} d\omega - \iiint \Psi \nabla \Psi dx\, dy\, dz\,,$$

wo die dreifachen Integrale über den ganzen Raum S auszudehnen sind. Berücksichtigt man, dass $k^2\Psi + \nabla\Psi = 0$, und denkt man sich weiter beide Seiten der Gleichung mit einer constanten Grösse ε^2 multiplicirt, die so gewählt sein soll, dass $\varepsilon^2\Psi$ eine endliche Grösse ist, wozu nach Gleichung (28) [65] ε^2 von gleicher Ordnung mit $\frac{k^2 r}{\eta^2}$ sein muss [55a]), so erhält man:

$$(28^a) \qquad \varepsilon^2 \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$
$$= -\,\varepsilon^2 \int \Psi \frac{d\Psi}{dn} d\omega + k^2 \varepsilon^2 \iiint \Psi^2\, dx\, dy\, dz\,.$$

Da nun die Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindend klein von der Ordnung η^2 sind, so ist es auch das dreifache Integral links. Da hier aber unter dem Integralzeichen eine überall positive Grösse steht, so können die Werthe von $\varepsilon \frac{d\Psi}{dx}$, $\varepsilon \frac{d\Psi}{dy}$ und $\varepsilon \frac{d\Psi}{dz}$ im Allgemeinen selbst nur von derselben Ordnung kleiner Grössen wie η sein, oder wenigstens nur in Theilen des Raumes S, welche selbst von der Ordnung η^2 sind, endlich werden.

Nun denke man die Flächen construirt, welche der Gleichung

$$\Psi = \text{Const.}$$

entsprechen, und für den Theil des Raumes S, welcher zwischen zwei beliebigen solchen Flächen liegt, bilde man das Integral

$$(28^b) \qquad \varepsilon \iiint \sqrt{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2}\, dx\, dy\, dz = \Xi\,.$$

Nach dem Vorausgesagten kann dies Integral nur von derselben Ordnung kleiner Grössen wie η sein. Man kann nun die Integration so ausführen, dass man zuerst diejenigen Theile des Integrals zusammennimmt, welche zwischen zwei unendlich nahen Potentialflächen liegen. Es sei $d\omega$ ein Flächenelement einer solchen Fläche, in der das Potential den Werth Ψ hat, dn die Entfernung zwischen $d\omega$ und der nächsten Fläche, an der der Werth des Potentials $\Psi + d\Psi$ ist, dann ist $d\omega\, dn$ ein Element des Volumens und[55b])

$$\sqrt{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2}\, d\omega\, dn = d\Psi\, d\omega\,,$$

also

$$\Xi = \varepsilon \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} d\Psi \int d\omega\,,$$

wenn Ψ_0 und Ψ_1 die Werthe von Ψ an den äussersten Potentialflächen sind, zwischen denen man integrirt. Für jeden Werth von Ψ ist nun $\int d\omega$ gleich [66] dem Flächeninhalt Q desjenigen Theiles der betreffenden Potentialfläche, der innerhalb des Raumes S liegt. Also wird

$$\Xi = \varepsilon \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} Q d\Psi\,,$$

worin Q als Function des Werthes von Ψ anzusehen ist. Wenn nun Q überall endlich ist, darf die Differenz $\varepsilon\Psi_0 - \varepsilon\Psi_1$, innerhalb deren die Variable sich ändert, nur von der Ordnung η sein, da der Werth von Ξ von der Ordnung η ist. Oder es muss, wenn $\varepsilon\Psi_0 - \varepsilon\Psi_1$ endlich ist, innerhalb dieses Intervalles Q von der Ordnung η sein. Da nun nach unserer Voraussetzung der Raum S nicht eine solche Gestalt haben darf, dass man ihn durch eine unendlich kleine Schnittfläche in zwei Theile von endlichem Volumen theilen kann, wie das z. B. der Fall sein würde, wenn er aus zwei durch ein röhrenförmiges Stück verbundenen Hohlräumen bestände, so folgt aus dem Gesagten, dass nur in unendlich kleinen Theilen desselben, und namentlich auch nur in unendlich kleinen Theilen seiner Oberfläche, der Werth von $\varepsilon\Psi$ um eine endliche Grösse von einem constanten Werthe C abweichen könne.

Nach diesen Bemerkungen reducirt sich die Gleichung (28) auf

$$(28^c) \quad \int \frac{d\Psi}{dn}\, d\omega = -\frac{k^2 C}{3}\int r \frac{dr}{dn}\, d\omega = k^2 CS\,.$$

Wenn wir nämlich die vom Punkte α, β, γ auf die Tangentialebene von $d\omega$ gefällte Normale n nennen, ist $\frac{dr}{dn} = -\frac{n}{r}$, und $-\frac{1}{3} r \frac{dr}{dn}\, d\omega = \frac{n\, d\omega}{3}$ gleich dem Volumen eines Kegels, dessen Grundfläche $d\omega$ und dessen Spitze α, β, γ ist[56]). Deshalb ist:

$$-\tfrac{1}{3}\int r \frac{dr}{dn}\, d\omega = S\,.$$

Setzen wir jetzt voraus, der Raum S habe eine Oeffnung, die in einem nahehin ebenen Theile der Wand gelegen sei, dessen Ebene wir äusserlich unendlich verlängert und den freien Raum nach einer Seite begrenzend voraussetzen, wählen wir, wie früher, diese Ebene als Ebene der yz und verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten in die Oeffnung selbst. Nehmen wir ferner an, dass die Vibrationen des Hohlraumes erregt werden durch einen Schallwellenzug, der gegen die Oeffnung schlägt. Wir müssen nun an der Oeffnung den Werth von Ψ so bestimmen, dass er aussen und innen continuirlich wird und [67] im Innern in einer gegen die Dimensionen der Oeffnung grossen Entfernung in den constanten Werth $C\cos(2\pi nt)$ übergeht.

Es sei h eine Grösse, welche in verschiedenen Punkten der Oeffnung des Hohlraumes verschiedene Werthe hat. Wir setzen, indem wir die Integration über die Fläche der Oeffnung ausdehnen, für den freien Raum:

$$(29) \qquad \Psi = \int h \frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r}\, d\omega$$
$$+ H\cos kx \cos(2\pi nt) + J\cos kx \sin(2\pi nt)\,.$$

Dieses Geschwindigkeitspotential stellt einen Zug ebener Wellen dar, die, an der yz-Ebene reflectirt, sich in stehende verwandeln, und ein System fortschreitender Wellen, welche von der Oeffnung ausgehen[57]). Statt der unendlich ausgedehnten ebenen Wellen lässt sich übrigens ebenso gut die etwas allgemeinere Voraussetzung der Gleichung (16) hier anwenden,

dass nämlich die Wellen von einem weit von der Oeffnung entfernten tönenden Punkte ausgehen, dann bekommen sie, wie dort gezeigt, dicht vor der Oeffnung die in (29) angenommene Form.

An der yz-Ebene ist ausserhalb der Oeffnung $\frac{d\Psi}{dx} = 0$, in der Oeffnung[58]):

$$(29^a) \qquad \frac{d\overline{\Psi}}{dx} = -2\pi h \cos(2\pi n t)$$

und annähernd:

$$(29^b) \quad \overline{\Psi} = \left[\int \frac{h}{r} d\omega + H\right] \cos(2\pi n t) + \left[k \int h\, d\omega + J\right] \sin(2\pi n t).$$

Innerhalb des Raumes S setzen wir dagegen:

$$(29^c) \qquad \Psi = \left[C - \int \frac{h \cos kr}{r} d\omega\right] \cos(2\pi n t).$$

Dann ist in der Oeffnung:

$$(29^d) \qquad \frac{d\overline{\Psi}}{dx} = -2\pi h \cos(2\pi n t),$$

$$(29^e) \qquad \overline{\Psi} = \left[C - \int \frac{h\, d\omega}{r}\right] \cos(2\pi n t).$$

Die Werthe von $\frac{d\overline{\Psi}}{dx}$ aus (29^a) und (29^d) sind identisch. Damit auch die von $\overline{\Psi}$ aus (29^b) und (29^e) identisch seien, muss sein:

$$(29^f) \qquad J + k \int h\, d\omega = 0,$$

$$(29^g) \qquad C - H = 2 \int \frac{h\, d\omega}{r}.$$

[68] Es muss also die Grösse h für die einzelnen Punkte der Oeffnung so bestimmt werden, dass ihre Potentialfunction innerhalb der Oeffnung constant wird. Die Bedingung endlich, dass $\frac{d\Psi}{dn} = 0$ ist längs der Oberfläche von S mit Ausnahme der Mündung, wird durch die Gleichung (29^c) erfüllt, wenn die Wand, in der die Oeffnung sich befindet, so weit merklich eben ist, als das Potential von h nicht gegen C verschwindet.

Endlich wird für diesen Fall die Gleichung (28^c) [59]:

$$(29^h) \qquad 2\pi \int h\,d\omega = k^2 CS.$$

Aus (29^f) und (29^h) folgt:

$$(29^i) \qquad J = -\frac{k^3 CS}{2\pi}.$$

Nennen wir nun M die Masse, welche nöthig ist, um, auf der Fläche der Oeffnung passend vertheilt, in dieser die Potentialfunction constant gleich 1 zu machen, so ist

$$(29^k) \qquad \int h\,d\omega = \tfrac{1}{2}(C-H)M,$$

da die Dichtigkeit h nach (29^g) den Potentialwerth $\frac{1}{2}(C-H)$ hervorbringt. Wir haben also nach (29^f):

$$(29^l) \qquad J + \tfrac{1}{2}k(C-H)M = 0.$$

Das Maximum des Potentials der stehenden Wellen im freien Raume ist $\sqrt{H^2+J^2}$, das Maximum in dem Hohlkörper S ist C. Aus (29^i) und (29^l) folgt:

$$\frac{H^2+J^2}{C^2} = \left(1 - \frac{k^2 S}{\pi M}\right)^2 + \left(\frac{k^3 S}{2\pi}\right)^2.$$

Dieses Verhältniss erreicht seinen Minimalwerth, die Resonanz wird also am stärksten, wenn das erste der beiden Quadrate, gegen welches im Allgemeinen das zweite verschwindend klein ist, gleich Null wird. Die Bedingung für das Maximum der Resonanz ist also:

$$(30) \qquad \pi M = k^2 S,$$

oder wenn wir statt k seinen Werth setzen, durch die Schwingungszahl n und die Schallgeschwindigkeit a ausgedrückt,

$$(3^a) \qquad k = \frac{2\pi n}{a},$$

[69] so ist:

$$(30^a) \qquad n^2 = \frac{a^2 M}{4\pi S}.$$

Ist die Oeffnung kreisförmig, so ist (s. (23^b) und (23^c)):

$$M = \frac{2R}{\pi},$$

oder, wenn wir die Fläche der Oeffnung mit s bezeichnen:

$$s = \pi R^2, \qquad M = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{s}{\pi}},$$

$$n = \frac{a\sqrt[4]{s}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi^5}\sqrt{S}}.$$

Wenn wir für die Schallgeschwindigkeit den Werth 332260^{mm} (entsprechend 0° und trockner Luft) nehmen, so wird

$$n = 56174\frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}},$$

während *Sondhauss* aus seinen Versuchen für n die empirische Formel für kreisförmige und quadratische Oeffnungen herleitet:

$$n = 52400\frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}},$$

worin nur der von *Sondhauss* gegebene Zahlencoefficient halbirt ist, weil *Sondhauss* nach der Art der französischen Physiker die Schwingungszahlen der Töne doppelt so hoch nimmt, als es nach unserer Bezeichnungsweise geschieht.

Noch besser stimmt die Berechnung für einige Versuche von *Wertheim*, bei denen das Verhältniss der Oeffnung zum Volumen des Hohlkörpers noch kleiner ist, als bei den Versuchen von *Sondhauss*. Ich habe aus den Versuchen, welche er mit drei verschiedenen Glaskugeln angestellt hat*), deren Volumen durch Eingiessen von Wasser verkleinert wurde, diejenigen nach der theoretischen Formel berechnet, bei welchen der Durchmesser der Oeffnung weniger als $\frac{1}{10}$ des Durchmessers einer Kugel war, deren Volumen dem des Hohlraumes gleich ist, und setze die Zahlen hierher, um zu zeigen, wie gut die theoretische Formel mit den Versuchen übereinstimmt.

*) Annales de Chimie et de Physique, Sér. 3, Tome XXXI, p. 428.

[70]

	Durchmesser der Oeffnung.	Volumen des Hohlraumes in Cub.Centm.	2n beobachtet	2n berechnet	△
Erste Kugel.	20mm	6528	184,2	193,1	0,020
Volumen 6528cc.		5712	206,4	206,4	0,000
Temperatur 24°.		4896	218,8	222,9	0,008
$a = 346550$.		4080	232,9	244,2	0,021
	10mm	2030	234,9	242,3	0,013
		1827	262,6	255,5	—0,012
		1624	285,1	270,9	—0,022
Zweite Kugel.		1421	300,5	290,3	—0,015
Volumen 2030cc.		1218	320,0	312,9	—0,010
Temperatur 18°.		1015	345,0	342,7	—0,003
$a = 343030$.		812	372,6	383,2	+0,008
		609	416,3	442,5	0,026
	15mm	2030	286,0	296,8	0,016
		1827	298,7	322,8	0,020
	6mm	715	328,2	317,4	—0,015
		615	340,4	342,2	+0,002
Dritte Kugel.		515	373,7	374,0	0,000
Volumen 715cc.		415	416,3	416,6	0,000
Temperatur 20°.		315	481,2	478,2	—0,003
$a = 344210$.		215	581,8	578,8	—0,002
		115	766,5	791,4	+0,014
	10mm	715	384,4	409,7	0,028
		615	411,6	441,8	0,031

Zur Erleichterung der Vergleichung sind in der letzten Rubrik unter △ die Logarithmen des berechneten n, dividirt durch das beobachtete n, hinzugefügt. Der Logarithmus des halben Tones $\frac{16}{15}$ beträgt 0,028. Die Werthe von △ zeigen, dass nur bei den verhältnissmässig zur Oeffnung kleineren Werthen des Volumens die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung sich einem halben Tone nähert.

Für Ellipsen von der Excentricität ε und der grossen Axe R ist die Masse M, welche, auf der Fläche passend vertheilt, in dieser das constante [71] Potential 1 giebt*),

$$M = \frac{R}{K_\varepsilon},$$

worin K_ε das ganze elliptische Integral erster Gattung für den Modul ε bezeichnet[60]). Es wird also nach (30^a) für Hohlräume mit einer elliptischen Oeffnung:

$$n^2 = \frac{a^2 R}{4\pi K S},$$

oder wenn man den Flächeninhalt s der elliptischen Oeffnung einführt und setzt:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1-\varepsilon^2},$$
$$s = \pi R^2 \varepsilon_1,$$

so wird:

$$n = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{\varepsilon_1}}} \cdot \frac{a\sqrt[4]{s}}{\sqrt[4]{\pi^5}\sqrt{2S}}.$$

Der Werth von n^2 ist also von dem für eine kreisförmige Oeffnung gültigen durch den Factor $\frac{\pi}{2K\sqrt{\varepsilon_1}}$ verschieden, und da dieser Factor grösser ist als 1, so wird der Ton einer elliptischen Oeffnung von gleicher Fläche etwas höher als der einer kreisförmigen.

Hat der Hohlraum noch eine zweite Oeffnung, die ebenfalls in einem nahehin ebenen Theile der Wand liegt, so setze man für den äusseren vor ihr liegenden Raum:

$$\Psi = \int h_1 \frac{\cos(kr - 2\pi n t + \tau)}{r}\, d\omega,$$

in dem ihr benachbarten Theile des inneren Raumes

$$\Psi = \left[C_1 - \int \frac{h_1 \cos kr}{r}\, d\omega\right] \cos(2\pi n t - \tau)$$
$$+ k\int h_1\, d\omega \cdot \sin(2\pi n t - \tau).$$

*) S. *Clausius* in *Poggendorff*'s Annalen LXXXVI, S. 161.

Es sind, wie vorher, an der Oeffnung die Werthe von $\frac{d\overline{\Psi}}{dn}$ übereinstimmend, die Werthe von $\overline{\Psi}$ werden:

$$\overline{\Psi} = \int \frac{h_1 d\omega}{r} \cdot \cos(2\pi nt - \tau) + k \int h_1 d\omega \sin(2\pi nt - \tau),$$

$$\dot{\overline{\Psi}} = \left[C_1 - \int \frac{h_1 d\omega}{r}\right] \cos(2\pi nt - \tau) + k \int h_1 d\omega \sin(2\pi nt - \tau).$$

Es muss also sein[61]:

$$C_1 = 2 \int \frac{h_1 d\omega}{r},$$

[72] und setzen wir, wie bei der ersten Oeffnung in (29^k):

$$\int h_1 d\omega = \tfrac{1}{2} C_1 M_1,$$

so wird in den von der Oeffnung entfernteren Stellen des inneren Raumes:

$$\Psi = C_1 \cos(2\pi nt - \tau) + \tfrac{1}{2} k C_1 M_1 \sin(2\pi nt - \tau).$$

Dies muss aber gleich werden dem früher festgesetzten Werthe von Ψ im Innern der Kugel:

$$\Psi = C \cos(2\pi nt).$$

Daraus folgt, dass

$$C_1 [\cos\tau - \tfrac{1}{2} k M_1 \sin\tau] = C,$$
$$\sin\tau + \tfrac{1}{2} k M_1 \cos\tau = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass τ sehr klein ist, und demgemäss aus der ersten, dass mit Vernachlässigung kleiner Grössen

$$C = C_1.$$

Nun wird aus Gleichung (28^c):

$$\int \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 2\pi \int h d\omega + 2\pi \int h_1 d\omega = k^2 CS$$

oder:

$$(31) \quad \pi M(C - H) + \pi M_1 C = k^2 CS;$$

dazu[62]:

$$J = -\frac{k^3 CS}{2\pi},$$

$$(31^a) \quad \frac{H^2 + J^2}{C^2} = \frac{(\pi(M + M_1) - k^2 S)^2}{\pi^2 M^2} + \frac{k^6 S^2}{4\pi^2}.$$

Damit $\frac{H^2 + J^2}{C^2}$ ein Minimum werde, und die stärkste Resonanz eintrete, setzen wir

$$(31^b) \qquad \pi(M + M_1) = k^2 S,$$

durch welche Gleichung die Tonhöhe der stärksten Resonanz bestimmt ist, wie es in (30) für eine Oeffnung geschehen war. Diese Gleichung stimmt, wenn die Oeffnungen geometrisch ähnlich sind, mit dem von *Sondhauss* aus den Versuchen abgeleiteten Gesetze. Sind beide Oeffnungen congruent, so verhält sich die Schwingungszahl des Körpers zu der desselben Körpers mit einer Oeffnung, wie $\sqrt{2} : 1$. Der Ton ist also im ersten Falle um eine verminderte Quinte höher als im zweiten Falle, was genau mit einigen Versuchen von *Sondhauss* *) übereinstimmt.

Heidelberg, im März 1859.

---

*) *Poggendorff*'s Annalen LXXXI, S. 366.

Anmerkungen.

Die vorliegende Arbeit des grossen Forschers, dessen wissenschaftliche Verdienste in Heft 79 der Klassiker (S. 50 u. ff.) kurz skizzirt sind, bietet sowohl in mathematischer als in physikalischer Hinsicht ein hervorragendes Interesse dar. In ersterer Beziehung liegt ihre Bedeutung vor Allem in der Uebertragung der wichtigsten Sätze der Potentialtheorie auf solche Functionen, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + k^2\varphi = 0\,, \text{ resp. } = f(x, y, z)$$

genügen. Die dadurch gewonnenen allgemeinen Sätze sind nicht nur wegen des Nutzens, den sie für die Behandlung specieller akustischer Probleme gewähren, von Wichtigkeit; dieselben bilden auch die Grundlage für eine exacte Formulirung des sogenannten *Huygens*'schen Princips, wie sie neuerdings u. A. von *G. Kirchhoff* (Sitzungsberichte d. Berliner Akadem. 1882, 641—669) entwickelt ist. Erwähnt *Helmholtz* auch den Namen jenes Princips nicht, so leitet er dasselbe doch implicite ab. Neben den erwähnten Sätzen wird den Mathematiker die Art der Fragestellung bei dem speciellen Problem der Luftschwingungen in Röhren interessiren, ferner die Untersuchung besonderer Röhrenformen, wie sie in den §§ 8 und 9 durchgeführt ist, eine Untersuchung, die sich auf die feinsten Hülfsmittel der Analysis stützt.

Physikalisch wichtig ist in unserer Arbeit, dass es *Helmholtz* gelungen ist, die Widersprüche der älteren Theorie mit der Erfahrung zu beseitigen, und zwar nicht, wie es vor ihm versucht war, durch irgend welche Hülfshypothesen über den Zustand der Luft am offenen Ende der Röhre, sondern dadurch, dass er den Innenraum der Röhre und den äusseren Luftraum als einen zusammenhängenden Raum behandelte. Durch diese neue Fassung der Aufgabe gelang es ihm, eine

Beziehung zu ermitteln zwischen den ebenen Wellen im Innern der Röhre und den Kugelwellen, welche durch dieselben im äusseren Raume erregt werden. Dieses hochbedeutsame Resultat ermöglichte es, eine Anzahl von Fragen zu beantworten, über welche die frühere Theorie keine Auskunft zu geben vermochte, z. B. über die Phasen und die Stärke der Resonanz, wenn die Röhre durch äussere tönende Körper zum Tönen gebracht wird. Endlich vermochte *Helmholtz* eine Aufgabe zu lösen, die bis dahin der theoretischen Behandlung unzugänglich gewesen war, die Aufgabe nämlich, die Höhe der Töne stärkster Resonanz bei solchen Hohlräumen zu bestimmen, welche nur eine oder wenige enge Oeffnungen haben. Diese Theorie der Resonatoren oder, wie *Kirchhoff* sie nennt, kubischen Pfeifen bildet den Inhalt des letzten Paragraphen.

Das Gesagte wird hinreichen, um die Aufnahme der wichtigen Arbeit in die Sammlung der Klassiker gerechtfertigt erscheinen zu lassen. Dem Neudruck ist das Original, *Crelle-Borchardt*'s Journal für die reine und angewandte Mathematik Band **57**, S. 1—72 (1860), zu Grunde gelegt. Doch sind die Aenderungen, die der Abdruck der Arbeit in *Helmholtz*' »Wissenschaftl. Abhandlungen« Band I, S. 303—382 (Leipzig, 1882) enthält, mit berücksichtigt. Insbesondere sind diesem Abdruck die im Original fehlenden Ueberschriften der einzelnen Paragraphen entnommen. Ueber einige Aenderungen in den Formeln, die sonst noch erforderlich waren, geben die folgenden Noten Auskunft. Diese Noten enthalten ausserdem Erläuterungen verschiedener Stellen sowie die Durchführung schwierigerer Rechnungen, von denen im Text nur die Resultate angegeben sind. Nothwendig zum Verständniss der Abhandlung ist die Bekanntschaft mit den Grundgleichungen der Hydrodynamik und ihrer Anwendung auf die Schallbewegung, ferner eine Kenntniss der Sätze der Potentialtheorie, insbesondere der Untersuchungen von *Green*, die in Heft 61 der Klassiker abgedruckt sind. Auch die Theorie der elliptischen Integrale wird an mehreren Stellen benutzt.

Zum Schlusse sei erwähnt, dass *Helmholtz* vor dem Druck der Originalarbeit einen Auszug aus derselben in den »Heidelberger Jahrbüchern der Litteratur«, 52. Jahrg., 1859, S. 354—357, veröffentlicht hat; vergl. auch: *Helmholtz*, Wissenschaftl. Abhandlungen Band III (1895), S. 16—20.

---

1) *Zu S. 8 und 17.* Der Name »Geschwindigkeitspotential« ist von *Helmholtz* in seiner Arbeit über die Wirbelbewegungen (vgl. Heft 79 der Klassiker, S. 3 und 55) eingeführt, während der Begriff schon bei *Lagrange* vorkommt.

Das S. 8 unten citirte Theorem von *Green* ist der Satz S. 24 in Heft 61 der Klassiker.

2) *Zu S. 11.* Die folgende Formel ist im Original wie in den »Wissenschaftl. Abhandlungen« unrichtig abgedruckt.

3) *Zu S. 14.* In einer späteren Arbeit (Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg, Band III, 1863; Wissenschaftl. Abhandlungen, Band I, S. 383—387) hat *Helmholtz* gezeigt, dass die Uebereinstimmung der theoretischen Formeln mit den Versuchen *Zamminer*'s eine bessere wird, wenn man die Reibung der Luft mit in Rechnung zieht.

3ª) *Zu S. 15.* Hier steht im Original fälschlich »kleiner« statt »grösser«. Dass »grösser« richtig ist, ergiebt sich aus S. 84 des Textes, wenigstens wenn die elliptische Oeffnung gleiche Fläche mit der kreisförmigen hat.

4) *Zu S. 16.* Ueber die Ableitung der hydrodynamischen Gleichungen (1) (der sogenannten *Euler*'schen Gleichungen), sowie der Gleichung (1^a) vgl. *Poisson*'s Mechanik, Theil II, Buch VI, Cap. II. — Dass für die Schallbewegung die Gleichung (1^a) an Stelle des *Mariotte*'schen Gesetzes treten muss, ist zuerst von *Laplace* gezeigt, vgl. Mécan. Céleste, Vol. V, Livr. XII, Chap. III.

5) *Zu S. 17.* Während in (1^d) h_0 im Allgemeinen noch eine Function von t sein konnte, wird hier, wie im Folgenden, h_0 als constant angesehen. — Die weiter benutzte Vernachlässigung, bei der schon die Quadrate von $\mathfrak{h}$, $\frac{d\Phi}{dx}$, $\frac{d\mathfrak{h}}{dx}$ etc. sowie die Producte je zweier dieser Grössen vernachlässigt werden, ist in der Theorie der Schallbewegung allgemein gebräuchlich. Nur in einer Arbeit von *Riemann* (Götting. Abh. 1860, *Riemann*'s Mathematische Werke, S. 145) wird von dieser Annahme abgesehen.

6) *Zu S. 18.* Betreffs der Gleichung (2^b) ist Folgendes zu bemerken. Setzt man den Ausdruck (2^a) für Φ in (2) ein, so erhält man für $\frac{dP}{dt}$ den Ausdruck

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{4\pi a^2}\frac{dP}{dt} = q' \cos(2\pi n t) + q'' \sin(2\pi n t),$$

wo q' und q'' von t unabhängig sind, nämlich

$$(\beta)\quad -q' = \frac{\pi n^2}{a^2}\Psi' + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d^2\Psi'}{dx^2} + \frac{d^2\Psi'}{dy^2} + \frac{d^2\Psi'}{dz^2}\right].$$

Integrirt man Gleichung (α) nach t, so folgt:

$$(\gamma)\quad \frac{n}{2a^2}P = -q''\cos(2\pi nt) + q'\sin(2\pi nt) + q_0,$$

wo q_0 nur von x, y, z abhängt. Aus Gleichung (1^f), deren rechte Seite kein von t unabhängiges additives Glied enthält, folgt dann, dass auch $\mathfrak{h}$ das von t unabhängige Glied $\frac{2q_0}{n}$ enthalten müsste. Das würde heissen: Für den betrachteten Raum ist von vorn herein eine gegebene, von Punkt zu Punkt veränderliche Verdichtung vorhanden. Ist, wie hier stillschweigend vorausgesetzt wird, Letzteres nicht der Fall, so verschwindet der von t unabhängige Theil von $\mathfrak{h}$, d. h. es ist $q_0 = 0$, und damit geht die vorstehende Gleichung (γ) in die Gleichung (2^b) des Textes über; ferner ist (β) mit der ersten Gleichung (3) des Textes identisch, sobald man die Bezeichnung k aus (3^a) einführt. Gleichung (3^a) stellt die bekannte, für jede Wellenbewegung gültige Relation dar.

7) *Zu S. 20.* Im Original steht irrthümlich Φ statt Ψ.

7a) *Zu S. 21.* Die Gleichungen (4^c), (4^e) und (4^g) geben $\Psi = 0$ für $k = 0$, falls die Factoren A und h nicht $\frac{1}{k}$ proportional sind; nur wenn $A = \frac{A_1}{k}$, $h = \frac{h_1}{k}$ ist, erhält Ψ für $k = 0$ einen andern constanten Werth als Null.

Der S. 21 gemachte Uebergang von Summen zu Integralen ist derselbe wie in der Potentialtheorie und lässt sich ebenso begründen.

8) *Zu S. 22 und 23.* Es kommt hier die bekannte, zuerst von *Poisson* abgeleitete Eigenschaft des Potentials Ψ in Betracht, dass innerhalb des mit Masse von der Dichtigkeit h erfüllten Raumes

$$\nabla\Psi = -4\pi h$$

ist, während für discrete Massenpunkte $\nabla\Psi$ in den Massenpunkten seinen Sinn verliert.

8a) *Zu S. 23.* Im Original steht fälschlich Gleichung (4) statt (3).

9) *Zu S. 24.* Der Werth von

$$\nabla_x f_r = \nabla_x\left(\frac{\cos kr}{r}\right) - \nabla_x\left(\frac{1}{r}\right)$$

ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen (4^b) S. 19, verbunden mit den entsprechenden Ausdrücken für $\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}$ etc., falls man die rechten Seiten nach Potenzen von r entwickelt und die positiven Potenzen von r, die für $r = 0$ verschwinden, fortlässt.

9[a]) *Zu S. 24.* Im Original steht irrthümlich $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ statt $\alpha - x$, $\beta - y$, $\gamma - z$.

10) *Zu S. 24.* Es handelt sich in § 3 darum, zu beweisen, dass die durch (5) definirte Function Ψ der Gleichung (3) genügt, welche Gleichung das Analogon der *Poisson*'schen Gleichung der Potentialtheorie darstellt. Zu dem Zwecke wird zunächst der betrachtete Raum durch eine kleine, den Punkt x, y, z umschliessende Kugel in zwei Theile S_0, S_1 getheilt; und da für den Raum S_1 der Punkt x, y, z ein äusserer, mithin

$$\nabla_x \Psi_1 + k^2 \Psi_1 = 0$$

ist, so ist nur der Werth von $\nabla_x \Psi_0 + k^2 \Psi_0$ zu ermitteln, wo Ψ_0 das auf der rechten Seite von (5) stehende, aber nur über S_0 zu erstreckende Integral ist. Um den in Rede stehenden Werth zu finden, wird Ψ_0 als Summe der Integrale Ψ' und Ψ'' (S. 24) dargestellt. Ψ'' ist aber ein gewöhnliches Raumpotential, also auch innerhalb der wirkenden Masse, d. h. innerhalb S_0, endlich, und zugleich ist dort

$$\nabla_x \Psi'' = -4\pi q\,.$$

Ferner wird $k^2 \Psi'' = 0$, wenn man den Radius der Abschliessungskugel immer kleiner werden lässt. Es bleibt daher nur noch der Theil Ψ' zu untersuchen. Nun ist f_r für alle endlichen Werthe von r endlich (und verschwindet für $r = 0$). Daher ist auch das Integral Ψ' endlich und verschwindet, wenn man den Radius der Abschliessungskugel immer mehr verkleinert. Ferner ist

$$\nabla_x \Psi' = \iiint q_{\alpha,\beta,\gamma} \nabla_x(f_r)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma =$$

$$- k^2 \iiint \frac{q_{\alpha,\beta,\gamma}}{r}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\,;$$

d. h. $\nabla_x \Psi'$ hat die Form eines Raumpotentials, bleibt also innerhalb des Integrationsgebietes S_0 überall endlich und wird mit abnehmendem Radius von S_0 immer kleiner und kleiner.

11) *Zu S. 25.* In den »Wissenschaftl. Abhandlungen« ist die Ueberschrift von § 4 dieselbe wie die von § 3. Statt dessen schien es zweckmässiger, »Gesetz der Flächendichtigkeit« zu setzen. Denn während in § 3 das Analogon der *Poisson*-schen Gleichung für das Raumpotential abgeleitet ist, handelt es sich hier um das Analogon der charakteristischen Eigenschaft des Flächenpotentials und weiterhin um die Anwendung des *Green*'schen Satzes auf Geschwindigkeitspotentiale.

12) *Zu S. 26.* Der hier benutzte Ausdruck für $\frac{df_r}{dx}$ ist wieder nicht der vollständige Werth dieser Grösse, sondern wird aus letzterem erhalten, wenn man cos (kr) und sin (kr) nach Potenzen von r entwickelt und die positiven Potenzen von r fortlässt.

Dass $\frac{df_r}{dx}$ endlich ist, folgt unmittelbar daraus, dass $\frac{x-\alpha}{r}$ ein echter Bruch ist. Die discontinuirliche Aenderung dieses Bruches ergiebt sich daraus, dass für zwei Punkte x, y, z auf entgegengesetzten Seiten der Fläche die Differenz $x-\alpha$ entgegengesetztes Zeichen hat, während r stets positiv ist. Geht man z. B. parallel der x-Axe durch die Fläche, so hat $\frac{x-\alpha}{r}$ auf der einen Seite den Werth $+1$, auf der anderen den Werth -1, wie nahe man auch der Fläche kommen mag. — Diese discontinuirliche Aenderung von $\frac{df_r}{dx}$ ist deshalb unwesentlich, weil die Fläche Ω_0, über die man integriren muss, um $\frac{d\Psi'_0}{dx}$ zu erhalten, beliebig klein angenommen werden kann; und mit der Verkleinerung dieser Fläche wird auch das Integral $\frac{d\Psi'_0}{dx}$ beliebig klein, da die zu integrirende Function endlich ist. Daraus folgt, dass die ersten Ableitungen von Ψ beim Durchgang durch die Fläche dieselben Aenderungen erleiden wie die ersten Ableitungen von Ψ'', und die letztgenannten Aenderungen sind aus der Potentialtheorie bekannt.

13) *Zu S. 27.* Ueber den Satz von *Green* vgl. Heft 61 der Klassiker, S. 24.

In der letzten Zeile vor (7^a) steht im Original: »nach Gleichung (3), (5) und (7)«. Gleichung (5) aber kommt gar nicht in Betracht.

14) *Zu S. 28.* Vgl. Heft 61 der Klassiker, S. 27—28.

Zur Erleichterung des Verständnisses wird es zweckmässig sein, die wichtigen Gleichungen (7^c) und (7^d) direct zu beweisen. Auf die Function

$$\Phi = A\,\frac{\cos(kr)}{r}$$

kann man die Gleichung (7) nicht unmittelbar anwenden, weil Φ und $\nabla\Phi$ in einem Punkte des Integrationsraumes S unendlich werden, nämlich in dem Punkte α, β, γ, von dem aus r gerechnet wird. Um die Anwendung von (7) doch zu ermöglichen, schliessen wir aus dem Integrationsgebiete S das Innere einer kleinen, um α, β, γ mit dem Radius δ beschriebenen Kugel aus und nennen den übrig gebliebenen Raum S_1. Im Raume S_1 ist Φ überall continuirlich und endlich, auf S_1 können wir daher Gleichung (7) ohne Weiteres anwenden. Zugleich ist in S_1

$$\nabla\Phi + k^2\Phi = 0\,.$$

Ferner sind die in (7) auftretenden Oberflächenintegrale jetzt über die Oberfläche von S_1 zu erstrecken. Diese besteht aus zwei Theilen: 1) der Oberfläche von S, die wir O nennen wollen, 2) der Oberfläche der Kugel δ. Dem entsprechend zerfällt jedes der Flächenintegrale in zwei, und die Gleichung (7) lautet, wenn wir das Integrationsgebiet durch einen dem Integralzeichen angehängten Index bezeichnen:

$$(7')\quad\left\{\begin{aligned}&\int_O \Psi\frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)d\omega + \int_\delta \Psi\frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)d\omega\\ &\quad= \int_O \frac{\cos kr}{r}\frac{d\Psi}{dn}d\omega + \int_\delta \frac{\cos kr}{r}\frac{d\Psi}{dn}d\omega\\ &\quad+ \iiint_{S_1}\frac{\cos kr}{r}\left(\nabla\Psi + k^2\Psi\right)dx\,dy\,dz\,.\end{aligned}\right.$$

Drückt man das Flächenelement der Kugel δ durch Polarcoordinaten aus:

$$d\omega = \delta^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

und beachtet, dass an der Kugelfläche $r = \delta$ ist und n, die

d. h. $\nabla_x \Psi'$ hat die Form eines ... zusammen-
innerhalb des Integrationsgebi...
mit abnehmendem Radius ...

11) *Zu S. 25.* In den ...
Ueberschrift von § 4 d...
schien es zweckmässi...
setzen. Denn währ...
schen Gleichung fü...
es sich hier um ...
schaft des Fläch...
des *Green*'sche...

$$\left(\frac{d\Psi}{dr}\right)_{r=\delta} \delta^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\left(\frac{d\Psi}{dr}\right) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

12) *Zu S* ...

$$\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)\right]_{r=\delta} = -\frac{k\delta \sin(k\delta) + \cos(k\delta)}{\delta^2},$$

wieder nich...
wird aus ...
nach Pote...
von r fo...

$$\ldots \sin(k\delta) + \cos(k\delta)] J_1,$$

Da...

$$\ldots \Psi \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi .$$

ein e... über S_1 erstreckte dreifache Integral
Bru... über S, vermindert um das über
ent... erstreckte Integral
ge...

$$\ldots (\nabla \Psi + k^2 \Psi) \, dx \, dy \, dz .$$

... räumlicher Polarcoordinaten wird das letz-

$$\ldots d\varphi \int_0^\delta (\nabla \Psi + k^2 \Psi) \cos(kr) \, r \, dr ;$$

... zugleich, dass J_2 endlich ist.
... vorstehender Ausdrücke geht Gleichung
... über:

$$\ldots \left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega - [k\delta \sin(k\delta) + \cos(k\delta)] J_1$$

$$- \int \frac{\cos kr}{r} \frac{d\Psi}{dn} d\omega + \delta \cos(k\delta) J$$

$$\iiint \frac{\cos kr}{r} (\nabla \Psi + k^2 \Psi) \, dx \, dy \, dz - J_2 .$$

Die Gleichung ($7''$) gilt für jeden Werth von δ und bleibt bestehen, wenn man δ beliebig verkleinert. Wird schliesslich $\delta = 0$, so verschwindet das Integral J_2, vorausgesetzt, dass Ψ und $\nabla\Psi$ in der Nähe des Punktes α, β, γ endlich sind. Ebenso wird $\delta \cos(k\delta) J = 0$ für $\delta = 0$. Endlich ist

$$\lim_{\delta=0} J_1 = 4\pi\Psi_\alpha .$$

Denn für $\delta > 0$ ist

$$J_1 = (\Psi)\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi(\Psi),$$

wo (Ψ) einen Mittelwerth derjenigen Werthe bezeichnet, welche Ψ an der Kugelfläche δ annimmt. Für $\delta = 0$ reducirt sich die Kugelfläche auf den Punkt α, β, γ, der Mittelwerth (Ψ) daher auf den Werth, den Ψ in α, β, γ annimmt, d. h. auf Ψ_α. Somit folgt aus ($7''$) für $\delta = 0$:

$$(7''')\begin{cases} \displaystyle\int_O \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega - 4\pi\Psi_\alpha \\ \displaystyle = \int_O \frac{\cos kr}{r}\frac{d\Psi}{dn} d\omega + \iiint_S \frac{\cos kr}{r}(\nabla\Psi + k^2\Psi)\,dx\,dy\,dz, \end{cases}$$

und diese Gleichung ist mit (7^c) identisch. (7^d), die nur ein specieller Fall von (7^c) ist, enthält eine Verallgemeinerung des *Huygens*'schen Princips.

15) *Zu S. 29.* Das hier über die Doppelschicht Gesagte ist nur unter der Voraussetzung correct, dass die mittlere Krümmung der Fläche an dem Elemente $d\omega$ verschwindet. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so bedürfen die Angaben des Textes einer kleinen Modification, die im Folgenden entwickelt werden soll.

Wir denken uns in allen Punkten der Oberfläche O von S die Normalen gezogen und tragen auf allen nach aussen und innen die Strecke $\frac{1}{2}\varepsilon$ ab. Die Endpunkte der äusseren Normalen mögen die Fläche O', die der inneren die Fläche O'' bilden. (Für ein constantes ε sind O' und O'' Parallel-Flächen von O.) Sind $d\omega$, $d\omega'$, $d\omega''$ entsprechende Elemente der drei Flächen, d. h. wird $d\omega'$, resp. $d\omega''$ aus O', resp. O'' durch die im Umfang von $d\omega$ errichteten Normalen ausgeschnitten, so ist

$$d\omega' = d\omega(1+\eta),\quad d\omega'' = d\omega(1-\eta),\quad \eta = \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right),$$

falls R und R_1 die Hauptkrümmungsradien von O an dem

Elemente $d\omega$ bezeichnen. Nun denke man die Fläche O' mit Masse von der Dichtigkeit $-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Psi}{1+\eta}$, die Fläche O'' mit solcher von der Dichtigkeit $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Psi}{1-\eta}$ belegt, so dass auf den Elementen $d\omega'$, $d\omega''$ gleiche Massen, doch von entgegengesetztem Vorzeichen, ausgebreitet sind; man nenne ferner r', resp. r'' die Entfernung eines Punktes x, y, z von $d\omega'$, resp. $d\omega''$. Dann ist das Potential der Fläche O':

$$-\int\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Psi}{1+\eta}d\omega'\frac{\cos(kr')}{r'} = -\int\frac{1}{\varepsilon}\Psi d\omega\frac{\cos(kr')}{r'},$$

das der Fläche O'' dagegen:

$$\int\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Psi}{1-\eta}d\omega''\frac{\cos(kr'')}{r''} = \int\frac{1}{\varepsilon}\Psi d\omega\frac{\cos(kr'')}{r''}.$$

Mithin ist das Potential der auf den beiden Flächen O', O'' ausgebreiteten Massen:

$$\int\Psi\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\cos(kr'')}{r''} - \frac{\cos(kr')}{r'}\right]d\omega.$$

Um das Potential der Doppelschicht zu erhalten, müssen wir zur Grenze $\varepsilon = 0$ übergehen. Ist nun r die Entfernung des Punktes x, y, z von $d\omega$, $f(r)$ eine beliebige Function von r, so ist

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{f(r'')-f(r')}{\varepsilon} = \frac{df(r)}{dn},$$

falls n die innere Normale von O ist. Daher ist das Potential der Doppelschicht:

$$\int\Psi\frac{d}{dn}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right)d\omega.$$

16) *Zu S. 29.* Das Potential einer gleichmässig mit Erregungspunkten belegten Kugelfläche vom Radius R ist für einen im Abstande ϱ vom Kugelmittelpunkte gelegenen Punkt:

$$\Psi = qR^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(kr)}{r}\sin\vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1,$$

wo

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos\vartheta_1$$

ist, während q die constante Dichtigkeit der Kugelbelegung

bezeichnet. Liegt der betrachtete Punkt im Innern der Kugel, ist also $\varrho < R$, so giebt die Ausführung der Integration:

$$\Psi = \frac{4\pi q R \sin(k\varrho)\cos(kR)}{k\varrho}.$$

Andererseits ist das Potential Ψ_1 eines von zwei concentrischen Kugeln mit den Radien R, R_1 $[R_1 > R]$ begrenzten Raumes von der Dichtigkeit 1 für denselben Punkt ϱ:

$$\Psi_1 = \int_R^{R_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(kr)}{r}\varrho_1^2 d\varrho_1 \sin\vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1,$$

wo

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos\vartheta_1.$$

Durch Ausführung der Integration folgt:

$$\Psi_1 = 4\pi\frac{\sin(k\varrho)}{\varrho}\times \frac{kR_1\sin(kR_1) + \cos(kR_1) - kR\sin(kR) - \cos(kR)}{k^3}.$$

Die Vergleichung von Ψ und Ψ_1 zeigt, dass man im Allgemeinen q stets so bestimmen kann, dass für alle Punkte im Innern der Kugel R $\Psi = \Psi_1$ wird, d. h. dass man die Wirkung des von den concentrischen Kugeln begrenzten Raumes für alle im Hohlraum gelegenen Punkte durch eine Oberflächenbelegung ersetzen kann. Eine Ausnahme bilden jedoch die Werthe von k, für die $\cos(kR)$ verschwindet.

17) *Zu S. 31.* Betreffs der Ableitung dieser Formel vgl. *Poisson*'s Mechanik, Band II, Buch VI, Cap. II, § 659.

18) *Zu S. 32.* Die Worte »dieselbe Betrachtung« könnten vielleicht Anfängern Schwierigkeiten bereiten. Gemeint ist, dass das Vorhandensein fester Körper in endlicher Entfernung das vorhergehende Resultat nur in so fern modificirt, als $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}$ andre Functionen von ω und ϑ werden, während die Form von Ψ ungeändert bleibt. Begründet wird das damit, dass man das Vorhandensein solcher Körper durch Annahme gewisser Kräfte, d. h. durch Annahme neuer Erregungspunkte ersetzen kann. — Dass an der Oberfläche eines festen Körpers die zu jener Fläche senkrechte Geschwindigkeitscomponente verschwindet, ist aus der Hydrodynamik bekannt.

19) *Zu S. 33, 40 und 56.* Vgl. auch hierüber *Poisson*'s Mechanik, Theil II, § 663. — Dass hier und auch späterhin

öfter derselbe Buchstabe n zur Bezeichnung der Schwingungszahl und zugleich zur Bezeichnung der Normale gebraucht ist, wird das Verständniss nicht stören.

20) *Zu S. 34 und 35.* Beschreibt man um die beiden Punkte a, b kleine Kugeln und schliesst das Innere derselben von dem Integrationsraume aus, so kann man auf den übrig bleibenden Raum unmittelbar die Gleichung (7^b) anwenden. Die über die Oberflächen der Abschliessungskugeln erstreckten Integrale ergeben dabei die rechte Seite der Gleichung (9), doch mit entgegengesetztem Zeichen. Die Ableitung ist der in Anmerkung 14 S. 93 entwickelten ganz analog.

Bei der Ableitung der Gleichung (9^c) [S. 35 unten] hat man nur den Punkt b mit einer kleinen Kugel zu umgeben, nicht aber das Flächenelement da, da Ψ nirgends unendlich wird. Daher fällt das auf der rechten Seite von (9) stehende Glied $-4\pi A \Phi_a \cos(2\pi n t)$ jetzt fort. Ferner ist zu beachten: Während die Integrale auf der linken Seite von (9), über die Oberfläche der festen Körper erstreckt, vorher Null ergaben, ist das jetzt bei dem zweiten dieser Integrale nicht mehr der Fall, da $\frac{d\Psi}{dn}$ an dem Elemente da nicht verschwindet; allerdings reducirt sich das in Rede stehende Integral auf ein Element. Demnach tritt an Stelle der Gleichung (9) zunächst folgende:

$$(9') \quad \begin{cases} \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega - \Phi_a B \cos(2\pi n t) da \\ = 4\pi A \Psi_b \cos(2\pi n t), \end{cases}$$

wobei die Integrale auf der linken Seite von (9′) nur über die Oberfläche der Kugel vom Radius ϱ zu erstrecken sind. Da die Differenz jener Integrale von t unabhängig ist, so muss, damit (9′) für beliebige t gelte, die Gleichung (9^c) stattfinden.

20ª) *Zu S. 34.* In der Gleichung für $\Psi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\Psi}{dn}$, die aus ($8^b$) und der letzten Gleichung S. 33 leicht folgt, wenn man beachtet, dass an der Kugel vom Radius ϱ n die entgegengesetzte Richtung von ϱ hat, fehlt im Original rechts der Nenner ϱ^2. Ebenso musste jener Nenner in der dritten Zeile S. 35 hinzugefügt werden.

20ᵇ) *Zu S. 35.* Die Gleichheit des Phasenunterschiedes

folgt daraus, dass der letztere durch die Verhältnisse $\frac{\Phi''_a}{\Phi'_a}$ und $\frac{\Psi''_b}{\Psi'_b}$ bestimmt wird.

21) *Zu S. 37.* Ψ ist von der Form

$$\Psi = \Psi' \cos(2\pi n t) + \Psi'' \sin(2\pi n t),$$

wo Ψ' und Ψ'' der Gleichung (3^b) S. 19 genügen. Für ebene Wellen, die sich parallel der Axe x fortpflanzen, ist Ψ von y und z unabhängig, die Gleichung (3^b) reducirt sich daher auf:

$$0 = k^2 \Psi' + \frac{d^2 \Psi'}{dx^2},$$

und ihr allgemeines Integral ist

$$\Psi' = M \cos(kx) + N \sin(kx),$$

worin M und N willkürliche Constanten sind. Da Ψ'' dieselbe Form hat, nur mit andern willkürlichen Constanten, so enthält Ψ vier willkürliche Constanten, die im Text mit A/k, B, $\mathfrak{A}/k$, $\mathfrak{B}$ bezeichnet sind. Kann man noch über den Anfangspunkt der Zeit willkürlich verfügen, so heisst das, man kann statt des ursprünglichen t setzen $t + c$, wo c willkürlich ist. Ueber c kann man dann so verfügen, dass nach Auflösung der trigonometrischen Functionen der Factor von $\sin(2\pi n t)$ ein Glied mit $\sin(kx)$ nicht enthält. So erhält man den Ausdruck (10) für Ψ.

22) *Zu S. 38.* n, die nach dem Innern des betrachteten Raumes gerichtete Normale, hat an der Mündung die Richtung der negativen, an dem Endquerschnitt die Richtung der positiven x-Axe. An letzterem Querschnitt hat zugleich die zu integrirende Function, da sie nur von x abhängt, für alle $d\omega$ denselben Werth, das Integral reducirt sich daher auf

$$\left(\Psi \frac{d\Phi}{dx} - \Phi \frac{d\Psi}{dx}\right) \int d\omega = \left(\Psi \frac{d\Phi}{dx} - \Phi \frac{d\Psi}{dx}\right) Q,$$

und hierin ist $\Phi = \cos kx$, für Ψ aber der Ausdruck (10) zu setzen. An der Mündung ist $x = 0$, $\Phi = 1$, $\frac{d\Phi}{dn} = 0$; doch hat dort Ψ nicht für alle $d\omega$ denselben Werth, vielmehr ist dort für Ψ der Ausdruck (10^b) zu setzen, in dem Ψ' und Ψ'' Functionen von y und z sind.

23) *Zu S. 39 und 43.* Da Φ von y und z unabhängig ist, so ist

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dn} = \frac{d\Phi}{dx}\cos\beta .$$

In der Gleichung für $\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega$, wie in den Gleichungen (11) und (11^a), haben die mit k multiplicirten Integrale im Original das Zeichen + statt —.

24) *Zu S. 40.* Die Gleichung (11^b) leitet man am besten direct aus (7) nach der in Anmerkung 14) (S. 93) entwickelten Methode ab, wobei zu beachten ist, dass Ψ der Gleichung (3^b) S. 38 genügt.

Drei Zeilen nach Gleichung (11^b) steht im Original fälschlich $\Phi\frac{d\Psi}{dn} - \Psi\frac{d\Phi}{dn}$, während aus dem Folgenden hervorgeht, dass $\mathfrak{C}$ das über die Kugelfläche ϱ erstreckte Integral der Function $\Psi\frac{d\Phi}{dn} - \Phi\frac{d\Psi}{dn}$ bezeichnet. Dass $\mathfrak{C}$ von der Zeit unabhängig ist, ergiebt sich aus der S. 34 abgeleiteten Formel, da Φ und Ψ für Punkte der sehr weit entfernten Kugel die Form (8^b) annehmen.

25) *Zu S. 41.* Dass die erste Gleichung (11^d) aus den beiden andern mittelst des Theorems (7^d) folgt, ergiebt sich am einfachsten daraus, dass (11^b) und (11^c) als Folgerung aus (7^d) und (7^b) angesehen werden können.

26) *Zu S. 42.* Zur Erläuterung diene folgende Bemerkung. Die Gleichung (11^e) gilt, in welchem Punkt des betrachteten Raumes auch der Punkt α, β, γ liege, also auch noch, wenn dieser Punkt auf die Kugel mit dem grossen Radius ϱ rückt. Ferner drückt in (11^e) $r_{,}$ die Entfernung des Punktes α, β, γ von einem Punkte der Röhrenöffnung aus, d. h. von einem Punkte, für den $x = 0$ ist, während y und z sehr kleine Werthe haben. In dem in Rede stehenden Falle wird daher

$$r_{,}^2 = \varrho^2\cos^2\omega + (\varrho\sin\omega\cos\vartheta - y)^2 + (\varrho\sin\omega\sin\vartheta - z)^2$$
$$= \varrho^2 - 2\varrho\varepsilon + y^2 + z^2 ,$$

d. h.

$$r_{,} = \varrho - \varepsilon , \quad \frac{1}{r_{,}} = \frac{1}{\varrho} ,$$

falls man Grössen von der Ordnung $\frac{\varepsilon^2}{\varrho}$ gegen ε, solche von der Ordnung $\frac{\varepsilon}{\varrho^2}$ gegen $\frac{1}{\varrho}$ vernachlässigt.

Dass hier der Buchstabe ω in doppelter Bedeutung gebraucht ist, nämlich einerseits zur Bezeichnung des Winkels zwischen ϱ und der x-Axe, andererseits zur Bezeichnung des Flächenelements $(d\omega)$, ist zwar unzweckmässig, stört aber das Verständniss nicht.

27) *Zu S. 42.* In den beiden folgenden Gleichungen hat der Factor M_1 im Original falsches Vorzeichen.

Hinsichtlich der letzten Gleichung S. 42 ist wieder zu beachten, dass n und ϱ entgegengesetzte Vorzeichen haben.

28) *Zu S. 44 und 45.* Zu den Entwickelungen S. 44 und 45 ist Folgendes zu bemerken. Mit demselben Rechte, wie beim Uebergang von Gleichung (11) zu (12) das Glied $k\int \Psi' \sin kx \cos\beta\, d\omega$ vernachlässigt ist, müsste beim Uebergang von (11^a) zu (12^a) das Glied $k\int \Psi'' \sin kx \cos\beta\, d\omega$ fortbleiben. Dass dasselbe hingeschrieben ist, hat wohl darin seinen Grund, dass gezeigt werden soll, von welcher Grössenordnung das zu vernachlässigende Integral $\int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\, d\omega$ ist. Uebrigens hat das zweite Glied der rechten Seite von (12^a), ebenso wie das entsprechende Glied von (11^a), im Original falsches Vorzeichen; desgleichen das erste Glied der rechten Seite von (12^c), welche Gleichung aus der zweiten Gleichung (11^f), verbunden mit (12^a), folgt. Auch in (12_c) sind zunächst mehr Glieder beibehalten, als schliesslich gebraucht werden, um die Grössenordnung von M_1 zu ermitteln. — In der zweiten Zeile nach Gleichung (12^b) ist im Original (11^a) statt (12^a) citirt.

Die Gleichung für $\overline{\Psi'}$ (S. 45, Z. 7) leitet man besser aus der zweiten Gleichung (11^d) statt aus (11^e) ab. Um $\overline{\Psi'}$, d. i. den Werth von Ψ' für Punkte der Röhrenöffnung, zu erhalten, muss man den Punkt α, β, γ, der in (11^d) ein beliebiger Punkt des dort betrachteten Raumes war, in einen Punkt der Röhrenöffnung verlegen. $r_,$ stellt dann die Entfernung zweier Punkte der Röhrenöffnung vor, $kr_,$ ist daher von der Ordnung $k\varepsilon$, und $\cos(kr_,)$ ist $= 1$ zu setzen. Das letzte Glied der zweiten Gleichung (11^d) kann man schreiben:

$$-\frac{k}{2}\int\frac{d\overline{\Psi}''}{dx}\,\frac{\sin kr_{,}}{kr_{,}}\,d\omega\,;$$

sein absoluter Werth ist kleiner als der absolute Werth von

$$\frac{k}{2}\int\frac{d\overline{\Psi}''}{dx}\,d\omega\,,$$

und daher ist [nach (12^a)] auch dies Glied zu vernachlässigen. Damit geht die zweite Gleichung (11^d) unmittelbar in die Gleichung für $\overline{\Psi}'$ über, wenn man r statt $r_{,}$ schreibt.

Die Grössenordnung von $\overline{\Psi}'$ übersieht man am einfachsten, wenn man in dem Integral für $\overline{\Psi}'$ Polarcoordinaten einführt, deren Pol der in der Röhrenöffnung liegende Punkt α, β, γ ist. Dann wird $d\omega = r\,dr\,d\vartheta$,

$$\overline{\Psi}' = -\frac{1}{2\pi}\iint\frac{d\overline{\Psi}'}{dx}\,dr\,d\vartheta\,.$$

Andererseits giebt die Gleichung (12) nach Einführung derselben Polarcoordinaten:

$$AQ = \iint\frac{d\overline{\Psi}'}{dx}\,r\,dr\,d\vartheta = (r)\iint\frac{d\overline{\Psi}'}{dx}\,dr\,d\vartheta = -2\pi(r)\overline{\Psi}',$$

falls (r) einen Mittelwerth von r darstellt. Da (r) von der Ordnung ε ist, so ist $\overline{\Psi}'$ von der Ordnung $\dfrac{AQ}{\varepsilon}$.

29) *Zu S. 47.* Zur Erläuterung diene folgende Bemerkung. Ψ' ist der Factor von $\cos(2\pi n t)$ in (10) oder (12^g), resp. in (12^h). Für $k = 0$ gehen jene Factoren über in

a) $\Psi_1' = Ax + B = A(x-\alpha)$, resp. b) $\Psi_2' = -\dfrac{AQ}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{\varrho}$.

Dass Ψ' als das Potential der Elektricität in einem stationären elektrischen Strome von der Intensität $J = AQ$ angesehen werden kann, ergiebt sich so. Damit Ψ' ein derartiges Potential ist, muss Ψ' der Gleichung $\nabla\Psi' = 0$ genügen; ausserdem muss das über irgend eine Niveaufläche erstreckte Integral

$$\int\frac{d\Psi'}{dn}\,do\,,$$

worin n die Normale der Niveaufläche ist, für alle Niveau-

flächen denselben Werth haben. Denn dies Integral ist proportional der durch die Niveaufläche in der Zeiteinheit strömenden Elektricitätsmenge. Setzt man für Ψ' den Ausdruck a), so ist die Niveaufläche der Querschnitt Q der Röhre, n fällt mit x zusammen, daher ist der Werth des Integrals $= AQ$. Nimmt man für Ψ' den Ausdruck b), so ist über die Halbkugel vom Radius ϱ zu integriren, und n fällt mit ϱ zusammen. Auch dies Integral giebt daher AQ. Das in Rede stehende Integral ist zugleich das Maass für die Intensität J, und zwar ist J gleich jenem Integral, multiplicirt mit dem Leitungsvermögen. Ist letzteres $= 1$, so ist das Integral gleich der Stromstärke J.

29[a]) *Zu S. 47 und 48.* Um die Formel (12^i) zu erhalten, hat man zunächst das Potential für den unendlichen Raum zu beiden Seiten der isolirenden Ebene zu suchen. Zu dem Zwecke führt man statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z elliptische Coordinaten durch die Gleichungen ein:

$$x = t \cos \vartheta, \quad y = \sqrt{R^2 + t^2} \sin \vartheta \cos \varphi,$$
$$z = \sqrt{R^2 + t^2} \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Dann erhält man für $t = 0$:

$$x = 0, \quad y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \vartheta \leqq R^2,$$

während für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

$$x = 0, \quad y^2 + z^2 = R^2 + t^2 \geqq R^2$$

wird. $t = 0$ giebt daher alle Punkte der kreisförmigen leitenden Oeffnung, während $t \gtreqless 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die Punkte des isolirenden Theiles der yz-Ebene giebt. Transformirt man die Potentialgleichung $\nabla \Psi' = 0$ auf die Variabeln t, ϑ, φ und nimmt ferner an, dass Ψ' von ϑ und φ unabhängig ist, d. h. dass alle Rotationsellipsoide $t =$ Const. und damit auch der Kreis $t = 0$ Niveauflächen sind, so erhält man für Ψ' die Gleichung

$$\frac{d(R^2 + t^2)\dfrac{d\Psi'}{dt}}{dt} = 0.$$

Ihre Lösung ist

$$\Psi' = C \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{R}\right) + D,$$

wo C und D willkürliche Constanten sind. Damit für sehr weit entfernte Punkte auf der Seite der positiven x, d. h. für grosse positive Werthe von t (ϑ ist stets $\leqq \frac{\pi}{2}$ zu nehmen) Ψ' dieselbe Form hat wie in Anmerkung 29) S. 102, nämlich

$$\Psi' = -\frac{J}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varrho} = -\frac{J}{2\pi} \cdot \frac{1}{t},$$

muss

$$C = \frac{J}{2\pi R}, \quad D = -\tfrac{1}{2}\pi \cdot C$$

sein, so dass

$$\Psi' = -\frac{J}{2\pi R}\left[\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\frac{t}{R}\right]$$

wird. Für $t = +\infty$ wird $\Psi' = 0$, für $t = -\infty$ dagegen ist

$$\Psi' = -\frac{J}{2\pi R} \cdot \pi = -\frac{J}{2R}.$$

$\frac{J}{2R}$ ist somit die Potentialdifferenz des ganzen betrachteten Raumes.

Andererseits ist in einem Cylinder vom Querschnitt Q das Potential [vgl. Anmerkung 29) S. 102]

$$\Psi = \frac{J}{Q}x + B,$$

die Potentialdifferenz für einen Cylinder von der Länge l also $= \frac{J}{Q}l$. Damit beide Potentialdifferenzen gleich werden, muss

$$l = \frac{Q}{2R}$$

sein.

30) *Zu S. 48.* Ψ'' ist der Factor von $\sin(2\pi n t)$ in (12^g), resp. (12^h). Für $k = 0$ ergeben diese beiden Factoren

$$\frac{\Psi''}{k} = -\frac{AQ}{2\pi}.$$

31) *Zu S. 48.* Hier steht im Original fälschlich (12^a) statt (12^g). — Die Ueberschrift von § 7 fehlt in den »Wissenschaftl. Abhandlungen«.

32) *Zu S. 49.* Formel (13^b) ist im Original wie in den »Wissenschaftl. Abhandlungen« unrichtig.

33) *Zu S. 50.* Dass der Punkt, von dem die reducirte Länge $\alpha - x$ gezählt wird, vor der Oeffnung liegt, setzt voraus, dass α positiv ist.

34) *Zu S. 51.* Es folgt dies unmittelbar daraus, dass $a^2 L^2 + J^2$ von x unabhängig ist.

Maximum der Geschwindigkeit und der Verdichtung heisst hier: Maximum an derselben Stelle im Verlaufe einer Schwingung, während vorher (S. 50) die Maximalwerthe der Elongationen, mithin die Maximalwerthe der grössten Geschwindigkeiten der verschiedenen Stellen verglichen wurden.

Dass tang $(k\alpha)$ eine kleine Grösse ist, folgt aus den Erörterungen S. 45. Dort ist gezeigt, dass, wenn der Querschnitt der Röhre von derselben Ordnung ist wie die Oeffnung, B die Ordnung $A\varepsilon$, $\frac{kB}{A} = -\operatorname{tang}(k\alpha)$ demnach die Ordnung $k\varepsilon$ hat, also klein ist. Da $k^2 Q$ von der Ordnung $k^2\varepsilon^2$ ist, so ist tang τ, von der Ordnung $k\varepsilon$.

35) *Zu S. 52 und 53.* Hier handelt es sich nicht, wie S. 50, um das Maximum oder Minimum des absoluten Werthes von $\frac{d\Psi}{dx}$, sondern hier kommt auch das Vorzeichen in Betracht. Aus (13) folgt, dass $\frac{d\Psi}{dx}$ für $t = 0$ ein Maximum ist, wenn

$$\cos k(x-\alpha) = +1, \text{ d. h. } k(\alpha - x) = 2\mathfrak{a}\pi, \quad \alpha - x = \mathfrak{a}\lambda,$$

ein Minimum, wenn

$$\cos k(x-\alpha) = -1, \text{ d. h. } k(\alpha - x) = (2\mathfrak{a}+1)\pi,$$
$$\alpha - x = (\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2})\lambda.$$

Das über die Geschwindigkeit im freien Raum Gesagte folgt so. Hier gilt für Ψ der Ausdruck (12^h) S. 46. Daher ist die Geschwindigkeit

$$\frac{d\Psi}{d\varrho} = \frac{AQ}{2\pi}\left[\frac{k\sin(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho} + \frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho^2}\right].$$

Für grosse ϱ ist angenähert:

$$\frac{d\Psi}{d\varrho} = \frac{AQk}{2\pi}\frac{\sin(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho},$$

und dieser Ausdruck ist für $t = 0$ ein Maximum, wenn

$$\sin k\varrho = +1, \text{ d. h. } k\varrho = (2\mathfrak{b} + \tfrac{1}{2})\pi, \quad \varrho = (\mathfrak{b} + \tfrac{1}{4})\lambda,$$

für $t = \frac{1}{4n}$ dagegen, wenn

$$\cos k\varrho = -1, \text{ d. h. } k\varrho = (2\mathfrak{b} + 1)\pi, \quad \varrho = (\mathfrak{b} + \tfrac{1}{2})\lambda.$$

Auch bei der Verdichtung handelt es sich nicht, wie S. 50, 51, um die Maxima der absoluten Werthe von $\mathfrak{h}$, sondern auch hier kommt das Vorzeichen in Betracht. Aus 14) folgt, dass, für $t = \frac{1}{4n}$, $\mathfrak{h}$ ein Maximum ist, wenn

$$\sin k(x - \alpha) = +1, \text{ d. h. } k(\alpha - x) = (2\mathfrak{a} - \tfrac{1}{2})\pi, \quad \alpha - x = (\mathfrak{a} - \tfrac{1}{4})\lambda$$

ist. — Der Werth von $\mathfrak{h}$ in den entfernteren Theilen des freien Raumes ergiebt sich aus (12^h):

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{a^2}\frac{d\Psi}{dt} = +\frac{AQk}{2\pi a}\frac{\sin(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho},$$

und dieser Ausdruck ist für $t = \frac{1}{4n}$ ein Maximum, wenn

$$k\varrho = (2\mathfrak{b} + 1)\pi, \quad \varrho = (\mathfrak{b} + \tfrac{1}{2})\lambda,$$

für $t = \frac{1}{2n}$ dagegen, wenn $\varrho = (\mathfrak{b} + \frac{3}{4})\lambda$.

Zu S. 53 Zeile 9—14 von unten ist Folgendes zu beachten: Die Maxima der Geschwindigkeit stehen still zur Zeit $t = 0$; dann ist nach (14^b) $kx = k\alpha - \mathfrak{a}\pi$, $\alpha - x = \mathfrak{a}\frac{\lambda}{2}$; an diesen Stellen sind aber nach S. 50 die Elongationen am grössten. Die Maxima der Geschwindigkeit eilen vorwärts zur Zeit $t = \frac{1}{4n}$; zu dieser Zeit ist nach (14^b)

$$kx = -(2\mathfrak{a} + 1)\frac{\pi}{2}, \quad -x = (2\mathfrak{a} + 1)\frac{\lambda}{4},$$

während an den Stellen $\alpha - x = (2\mathfrak{a} + 1)\frac{\lambda}{4}$ die Elongationen am kleinsten sind. Für die Maxima der Verdichtung und damit für die des Druckes ergiebt sich das Analoge aus (14^c).

36) *Zu S. 55.* Der Ausdruck für τ (Z. 7) folgt so: Aus (15ᵃ) ergiebt sich

$$\sin\tau = \frac{k^2 Q \sin kl \cos k\alpha}{\sqrt{k^4 Q^2 \sin^2 kl \cos^2 k\alpha + 4\pi^2 \cos^2 k(l+\alpha)}}.$$

Ist

$$k(l+\alpha) = (\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2})\pi,$$

so ist

$$\sin kl = (-1)^{\mathfrak{a}} \cos k\alpha \quad \text{und} \quad \sin\tau = (-1)^{\mathfrak{a}},$$

somit

$$\tau = (-1)^{\mathfrak{a}} \tfrac{1}{2}\pi.$$

Dass $\cos k\alpha$ nur mit Q verschwindet, folgt aus (12^f) und (12^e). Für $\cos k\alpha = 0$, $\operatorname{tang} k\alpha = \infty$, ist $\frac{B}{A} = \infty$, also $B = \infty$, da A von 0 verschieden ist. Andererseits ist QB endlich [vgl. (12^e) S. 45], so dass $B = \infty$ auch $Q = 0$ erfordert.

Dass die Vibrationen der Schwingungsmaxima in der Röhre sich von denen der mitgetheilten Bewegung um eine Viertel-Undulation unterscheiden, ergiebt sich unmittelbar daraus, dass die Bewegung der Luft am Orte einer Knotenfläche mitgetheilt wird, in Verbindung mit dem S. 50 ausgesprochenen Resultat über die Phasen der Bewegung am Orte der Maxima und Minima der Schwingung. Das über die von der Oeffnung entfernten Stellen im freien Raum Gesagte ist indessen nicht richtig. Denn dort ist [vgl. Anmerkung 34)] die Geschwindigkeit

$$\frac{d\Psi}{d\varrho} = \frac{AkQ}{2\pi} \frac{\sin(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho},$$

und für $\varrho = \mathfrak{a}\lambda$, d. h. $k\varrho = 2\mathfrak{a}\pi$, wo $\mathfrak{a}$ eine ganze Zahl, wird

$$\frac{d\Psi}{d\varrho} = \frac{-AkQ}{2\pi} \frac{\sin 2\pi n t}{\varrho} = \frac{AkQ}{2\pi} \frac{\cos\left(2\pi n t + \frac{\pi}{2}\right)}{\varrho};$$

d. h. für die um ganze Wellenlängen von der Oeffnung entfernten Wellen im freien Raum ist die Phase der Bewegung von der der Schwingungsmaxima in der Röhre um eine Viertel-Undulation verschieden.

37) *Zu S. 57.* An dem geschlossenen Ende der Röhre muss die Geschwindigkeitscomponente senkrecht zur Wand verschwinden. Dieser Bedingung genügt Φ nicht; daher

kann der angenommene Ausdruck (16^a) für Φ für sich allein nicht das Geschwindigkeitspotential der gesuchten Bewegung darstellen, wohl aber genügt $\Phi + \Psi$ allen Bedingungen, wo Ψ der Ausdruck (12^g) ist. Ein weiterer Grund für die Hinzufügung von Ψ zu Φ liegt darin, dass ohne jenes Zusatzglied $\frac{d\Phi}{dx}$ an der Mündung stets verschwinden würde.

37[a]) *Zu S. 57.* Der Phasenunterschied zwischen den erregenden und den erregten Wellen ist nicht, wie im Text angegeben ist, eine Viertel-Undulation, sondern eine halbe. Denn nach (16^c) ist $\tau_{,,} - \tau = \pi$.

38) *Zu S. 58.* Behufs Anwendung der Gleichung (9^c) brauchen die Functionen Φ und Ψ nicht für alle Punkte des betrachteten Raumes bekannt zu sein. Es genügt, zu wissen, dass Φ und Ψ der Gleichung (3^b) genügen, und dass an allen festen Wänden $\frac{d\Phi}{dn}$ und $\frac{d\Psi}{dn}$ verschwinden, mit Ausnahme des geschlossenen Endes der Röhre ($x = -l$), wo zwar $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ wird, $\frac{d\Psi}{dx}$ aber den gegebenen Werth $G \cos(2\pi n t)$ annimmt. Nur für den Punkt b und für $x = -l$ muss man die Form von Φ und Ψ kennen. Nun ist Φ in der Nähe des Punktes b gegeben:

$$\Phi = \frac{\cos k r_b}{r_b} \cos(2\pi n t),$$

während Φ in der Nähe von $x = -l$ die Form haben muss:

$$\Phi = f \cos k(l + x) \cos(2\pi n t + c),$$

wo jedoch f und c nicht bekannt sind. Von Ψ weiss man, dass es überall, also auch im Punkte b, die Form hat:

$$\Psi = \Psi' \cos(2\pi n t - \tau_{,,}) + \Psi'' \sin(2\pi n t - \tau_{,,}),$$

dass ferner in der Nähe von $x = -l$ Ψ' und Ψ'' dieselben Werthe haben wie in (12^g). Weiter ist zu beachten, dass der Gleichung (9^c) die Annahme zu Grunde lag, dass nur ein Flächenelement da eine gegebene Bewegung habe, dass aber hier an Stelle dieses Flächenelements die ganze Endfläche der Röhre tritt, und dass daher über alle Elemente dieser Fläche zu integriren ist. Da Φ für alle Elemente denselben Werth

hat, nämlich $\Phi_a = f \cos(2\pi n t + c)$, so reducirt sich das Integral auf

$$\Phi_a \int d\omega = \Phi_a \cdot Q\,.$$

Die Anwendung von (9^c) giebt unmittelbar die erste, resp. die damit identische zweite Gleichung S. 59. — Dass

$$\sqrt{(\Psi'_b)^2 + (\Psi''_b)^2}$$

proportional dem Factor A von (12^g) ist, gilt ohne Weiteres für Punkte der Röhre im Bereich der ebenen Wellen, wie auch nach (12^h) für Punkte des freien Raumes in grösserer Entfernung von der Mündung. Dass diese Proportionalität auch für Punkte in der Nähe der Röhrenmündung gilt, ist im Früheren nicht bewiesen, kann jedoch aus der Continuität der Bewegung geschlossen werden. — Die Geltung der Gleichung (15) folgt daraus, dass Ψ dieselbe Function ist, die S. 53—56 betrachtet war. — Die Grösse f, auf deren Werth aus (17^a) geschlossen wird, stellt die Elongation im tieferen Ende der Röhre, also die Resonanz der letzteren dar.

S. 59 Z. 19 ist das im Original fehlende Wort »reducirte« eingeschaltet.

38[a]) *Zu S. 59.* Zur Erläuterung diene folgende Bemerkung. Um direct die früheren Formeln anwenden zu können, führe man zwei Coordinatensysteme ein, deren Anfangspunkte in den beiden Mündungen liegen, und deren x-Axen entgegengesetzte Richtungen haben, so dass, wenn l die Länge der Röhre ist, $x_1 = -(x + l)$ wird. Der tönende Punkt liege in dem Theil des Luftraums, in dem x positiv ist. Das Geschwindigkeitspotential der durch diesen Punkt erregten Bewegung ist für den Raum $x > 0$ durch (16), für das Innere der Röhre durch $\Phi + \Psi$ dargestellt, wo Φ der Ausdruck (16^a), Ψ der Ausdruck (12^g) ist. Doch gelten jetzt **nicht** mehr die Gleichungen (16^b) und (16^c).

Im zweiten Theile des freien Raumes ($x_1 > 0$) ist kein tönender Punkt vorhanden. Das hier existirende Geschwindigkeitspotential (Ψ) und seine Fortsetzung (Ψ_1) im Innern der Röhre sind durch (12^h), resp. (12^g) bestimmt, falls man in diesen Ausdrücken x durch x_1 ersetzt und zugleich den Constanten A, α andere Werthe A_1, α_1 beilegt. Die Bedingung der Aufgabe ist dann, da (Ψ_1) dieselbe Bewegung wie $\Phi + \Psi$ darstellen soll, dass im Bereiche der ebenen

Wellen, also etwa für $x = x_1 = -\frac{l}{2}$,

$$\Phi + \Psi = (\Psi_1), \quad \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} = \frac{d(\Psi_1)}{dx}$$

wird. Da diese Bedingungen für jedes t erfüllt sein müssen, so ergeben sich vier Gleichungen zur Bestimmung von A, α, A_1, α_1 aus den gegebenen Grössen G, $\tau_{\prime\prime}$ (S. 56).

39) *Zu S. 60 und 61.* Die Aufgabe, Ψ' und Ψ'' in der Nähe der Mündung für eine gegebene Röhrenform zu bestimmen, kann man im Allgemeinen nicht lösen. Daher beschränkt sich *Helmholtz* darauf, umgekehrt für gewisse Werthe der Potentialfunction, die so anzunehmen sind, dass alle früher entwickelten Bedingungen erfüllt werden, die zugehörige Röhrenform zu bestimmen. Eine solche mögliche Annahme ist $\frac{d\Psi''}{dx} = 0$ für alle Punkte der Oeffnung.

(12^l) ergiebt sich aus der dritten Gleichung (11^d), die für beliebige Lagen des Punktes α, β, γ im Aussenraum galt, indem man diesen Punkt in die Mündung fallen lässt. Dann wird $kr_{\prime}$ sehr klein, $\frac{\sin kr_{\prime}}{kr_{\prime}} = 1$. Zugleich ist die Continuität zwischen den Werthen, die Ψ'' aussen und innen annimmt, hergestellt.

Gleichung (18) ist mit der zweiten Gleichung (11^d) identisch. (18_c) ist die Bedingung dafür, dass die Functionen Ψ' und Ψ_i continuirlich in einander übergehen. Die Nothwendigkeit dieser Bedingung ist in § 4, S. 30—31, erörtert.

40) *Zu S. 62.* Durch Einführung von Polarcoordinaten ϱ, ω an Stelle von y, z geht der Ausdruck

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} \text{ in } \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho\frac{d\Psi}{d\varrho}}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2\Psi}{d\omega^2}$$

über, und da Ψ von ω unabhängig sein soll, so geht die Gleichung $\nabla\Psi_i + k^2\Psi_i = 0$ in (18^e) über.

Die Gleichung (19) enthält im Original einen Druckfehler; dort und in den »Wissenschaftl. Abhandlungen« steht fälschlich $m^2 + k^2$ statt $m^2 - k^2$.

Man erhält die Lösung (19) von (18^e), indem man zunächst eine Particularlösung dieser Gleichung von der Form

$$\text{a)} \quad X \cdot Y$$

sucht, wo X nur von x, Y nur von ϱ abhängt. Soll der Ausdruck a) der Gleichung (18^e) genügen, so muss

$$\text{b)} \quad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + k^2 = -\frac{1}{Y}\left[\frac{d^2Y}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dY}{d\varrho}\right]$$

sein, und das ist, da die linke Seite von ϱ, die rechte aber von x unabhängig ist, nur möglich, wenn jede der beiden Seiten von b) gleich einer Constanten ist. Nennen wir letztere m^2, so wird also

$$\text{c)} \quad \frac{d^2X}{dx^2} = (m^2 - k^2)X, \quad \text{d)} \quad \frac{d^2Y}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dY}{d\varrho} + m^2Y = 0.$$

Für $m = 0$ wird $Y = 1$, $X = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx$, für andre Werthe von m dagegen

$$X = Ee^{\pm x\sqrt{m^2-k^2}}, \quad Y = U_{(m\varrho)}.$$

$U_{(m\varrho)}$ ist die *Bessel'*sche Function mit dem Index 0 und dem Argumente $m\varrho$, also nach der üblichen Bezeichnung

$$U_{(m\varrho)} = J_0(m\varrho).$$

Soll die gesuchte Particularlösung a) der Bedingung genügen, dass $\frac{d\Psi_i}{dn}$ an der Wand des Cylinders verschwindet, so muss $\frac{dU_{(m\varrho)}}{d\varrho}$ für $\varrho = R_1$ verschwinden; d. h. m ist der Bedingung unterworfen, dass $J_0'(mR_1) = 0$ ist. In der Theorie der *Bessel'*schen Functionen wird gezeigt, dass die Gleichung $J_0'(z) = 0$ unendlich viele reelle Wurzeln hat; die beiden kleinsten derselben sind S. 63 Z. 2 angegeben. m kann daher ausser dem Werthe Null unendlich viel andre Werthe annehmen, und man erhält unendlich viele Particularlösungen von der Form a); die Summe aller, jede mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt, giebt die allgemeine Lösung (19).

Aus dem Umstande, dass die Gleichung $J_0'(mR_1)$ keine imaginären Wurzeln hat, folgt, dass die Constante, der beide Seiten der Gleichung b) gleich zu setzen waren, positiv sein muss, also, wie oben geschehen, $= m^2$ gesetzt werden konnte.

Die zweite particuläre Lösung der Gleichung d) kommt hier nicht in Betracht, da dieselbe für $\varrho = 0$ unendlich wird. Aus demselben Grunde war auch für $m = 0$ zu setzen $Y = 1$, nicht $Y = A + B \log \varrho$.

41) *Zu S. 63.* An Stelle von $E_m e^{x\sqrt{m^2-k^2}}$ müsste, streng genommen, in (19)

$$E_m e^{x\sqrt{m^2-k^2}} + E'_m e^{-x\sqrt{m^2-k^2}}$$

stehen; und damit für $x = -l$ die Bedingung $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ erfüllt werde, muss für jedes m

$$E' = e^{-2l\sqrt{m^2-k^2}} E$$

sein. Falls nun k und R_1 klein, l beträchtlich gross ist, ist $e^{-2l\sqrt{m^2-k^2}}$ für jedes m, auch das kleinste, verschwindend klein, also E' nahe $= 0$.

42) *Zu S. 64.* Dass $\frac{d\Phi}{dx}$ für $\varrho = R$ und $x = 0$ unendlich wird, erkennt man aus folgender Betrachtung: Φ soll der Differentialgleichung (18^c) genügen, ausserdem soll sowohl an der Röhrenwand (d. h. für $\varrho = R$, $x \leqq 0$) als an der die Röhrenöffnung umschliessenden Ebene (d. h. für $x = 0$, $\varrho > R$) $\frac{d\Phi}{dn}$ verschwinden. Um diese Grenzbedingungen auf die möglichst einfache Form zu bringen, führen wir an Stelle von x, ϱ neue Variabele r, ϑ ein:

$$x = r \sin \vartheta, \quad \varrho = R + r \cos \vartheta.$$

Dann reduciren sich die Grenzbedingungen auf folgende: $\frac{d\Phi}{d\vartheta}$ soll sowohl für $\vartheta = 0$ als für $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ verschwinden. Wir wollen ferner der Einfachheit halber zunächst annehmen, dass Φ statt der Gleichung (18^c) der einfacheren Gleichung

$$\text{a)} \quad \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varrho^2} = 0$$

genügt, die, auf die Variabeln r, ϑ transformirt, in

$$\text{b)} \quad r \frac{dr \frac{d\Phi}{dr}}{dr} + \frac{d^2\Phi}{d\vartheta^2} = 0$$

übergeht. Jede überall endliche Lösung dieser Gleichung, die zugleich den oben erwähnten Grenzbedingungen genügt, hat die Form:

$$\text{c)}\quad \Phi = A r^{\frac{2}{3}} \cos \tfrac{2}{3}\vartheta + A_1 r^{\frac{4}{3}} \cos \tfrac{4}{3}\vartheta + A_2 r^{\frac{6}{3}} \cos \tfrac{6}{3}\vartheta + \cdots,$$

wo A, A_1, A_2, ... willkürliche Constanten sind. Ferner wird

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{dr}\sin\vartheta + \frac{d\Phi}{d\vartheta}\,\frac{\cos\vartheta}{r}$$

$$= \tfrac{2}{3} A r^{-\frac{1}{3}} \sin(\tfrac{1}{3}\vartheta) - \tfrac{4}{3} A_1 r^{\frac{1}{3}} \sin(\tfrac{1}{3}\vartheta) - \cdots,$$

und dieser Ausdruck wird, falls $\vartheta > 0$, für $r = 0$ unendlich wie $r^{-\frac{1}{3}}$ oder $(\varrho - R)^{-\frac{1}{3}}$.

Nun genügt Φ aber nicht der Gleichung (a), sondern der Gleichung (18[e]) S. 62. Führen wir auch in dieser r, ϑ an Stelle von x, ϱ ein, so lässt sich dasjenige particuläre Integral der transformirten Gleichung, welches dem ersten Gliede von c) entspricht, für kleine r in eine nach steigenden Potenzen von r fortschreitende Reihe entwickeln von der Form:

$$\text{d)}\quad \Phi = A r^{\frac{2}{3}} \cos \tfrac{2}{3}\vartheta + r^{\frac{5}{3}} f_1(\vartheta) + r^{\frac{8}{3}} f_2(\vartheta) + \cdots,$$

wo die f gewisse endliche, nur Cosinus der Vielfachen von $\frac{1}{3}\vartheta$ enthaltende Summen darstellen. Durch passende Bestimmung der in den f enthaltenen Constanten kann man es erreichen, dass jeder der Summanden von Φ den obigen Grenzbedingungen genügt. Aus dem Ausdruck d) aber ergiebt sich hinsichtlich des Unendlichwerdens von $\frac{d\Phi}{dx}$ dasselbe Resultat wie aus c).

43) *Zu S. 64 und 65.* Zu den Entwickelungen S. 64 und 65 ist Folgendes zu bemerken. Wie schon in Anmerkung 39) (S. 110) gesagt ist, handelt es sich darum, passende Annahmen über die Functionen Ψ' und Ψ'' zu machen. Hinsichtlich Ψ'' ist das S. 60/61 geschehen. Für die früher mit Ψ' bezeichnete Function, die jetzt im Innern der Röhre Ψ_i, im Aussenraume dagegen noch Ψ' genannt wird, ist diese Aufgabe noch zu lösen. Die Annahme $\Psi_i = \Phi$ würde den Bedingungen der Continuität (18[c]) nicht genügen, da letztere die Erfüllung der Gleichung S. 63 Z. 8 von unten bedingen würden; und dieser Gleichung gemäss die Coefficienten von Φ zu bestimmen, ist nicht möglich. Es ist deshalb eine andre Annahme zu machen, wobei zu beachten ist, dass der Werth

von $\frac{d\Psi'}{dx}$ erst zu bestimmen, die Form von Φ und damit von $\frac{d\Phi}{dx}$ aber gegeben ist. Als passende Annahme für Ψ' und Ψ_i ergeben sich die Ausdrücke (21^c) und (21^d), in denen

$$P_i = \int \frac{i \cos kr}{r} d\omega\,, \quad P_l = \int \frac{l \cos kr}{r} d\omega$$

gesetzt ist, während i den Werth (21^a) hat, l aber mittelst der Bedingung (21^b) zu bestimmen ist. Da für Punkte in der Nähe der Oeffnung $\cos kr = 1$ ist und daher P_l dort ein einfaches Potential darstellt, so kommt die Bestimmung von l auf eine bekannte Aufgabe der Potentialtheorie hinaus, die für den hier in Frage kommenden Fall des Kreises stets lösbar ist (vgl. *Heine*, Handbuch der Kugelfunctionen, zweite Auflage, Theil II, S. 130).

Dass Ψ' und Ψ_i den Bedingungen (18^a), (18^b) und der ersten Gleichung (18^c) genügen, bedarf keiner weiteren Erläuterung. Dass auch der zweiten Gleichung (18^c) Genüge geschieht, beruht auf der bekannten Eigenschaft des Flächenpotentials, nach der, falls x die Normale in einem Punkte einer anziehenden Fläche ist, deren Potential mit V bezeichnet werde, $\frac{dV}{dx} = X - 2\pi\varkappa$ für kleine positive x wird, dagegen $\frac{dV}{dx} = X + 2\pi\varkappa$ für kleine negative x, während X die normale Anziehungscomponente für den Fall darstellt, dass x von vorne herein constant $= 0$ gesetzt ist; $\varkappa$ bezeichnet die Dichtigkeit im Punkte $x = 0$ (vgl. Heft 2 der Klassiker, S. 24). Nun können in der Nähe der Röhrenmündung P_i und P_l als Potentiale der mit Masse von der Dichtigkeit i, resp. l belegten Oeffnung angesehen werden, und für diese Potentiale ist $X = 0$, da die anziehende Fläche in der Ebene $x = 0$ liegt. Es ist daher

für kleine positive x: $\frac{dP_i}{dx} = -2\pi i$, $\frac{dP_l}{dx} = -2\pi l$,

$$\frac{d\Psi'}{dx} = -2\pi(i + l)\,;$$

für kleine negative x: $\frac{dP_i}{dx} = +2\pi i$, $\frac{dP_l}{dx} = +2\pi l$,

$$\frac{d\overline{\Psi}_i}{dx} = \frac{d\overline{\Phi}}{dx} + 2\pi(i-l) = -2\pi(i+l)$$

nach (21^a).

44) *Zu S. 66.* Im Vorhergehenden sind Ψ' und Ψ_i durch Φ bestimmt. Von letzterer Function kennt man zwar die Form, doch enthält der Ausdruck für Φ [(19), resp. (22)] unendlich viele willkürliche Constanten. Je nach Wahl derselben erhält man verschiedene Functionen Φ, und für jede derselben liefert die Bedingung (18^d) die Form des nicht cylindrischen Theiles der Röhrenwand. Die Bedingung (18^d) sagt aus, dass die Linie n in einer Fläche $\Psi_i =$ Const. liegt. Da n die Normale der Röhrenwand bezeichnet, so bildet letztere eine zu allen Flächen $\Psi_i =$ Const. senkrechte Rotationsfläche. Gleichung (22^a) ist die Differentialgleichung, aus der sich für eine gegebene Function Ψ_i die Strömungscurven, d. h. die zu allen Flächen $\Psi_i =$ Const. senkrechten Curven, ergeben. Die Röhrenwand selbst wird von solchen Curven gebildet.

Die einfachste Annahme über die in Φ enthaltenen Constanten ist die im Anfang des § 9 gemachte, dass alle Coefficienten E verschwinden. Damit erhält man die einfachsten Röhrenformen.

45) *Zu S. 67.* Es handelt sich hier um die Aufgabe, eine gegebene Masse derart auf einer Kreisfläche zu vertheilen, dass das Potential für alle Punkte des Kreises constant ist. Die Lösung dieser Aufgabe sowie der entsprechenden für eine Ellipse leitet man am einfachsten aus der Lösung der analogen Aufgabe für ein Ellipsoid ab. Bekannt ist (vgl. Heft 19 der Klassiker, S. 83 ff.), dass das Potential einer unendlich dünnen, von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzten homogenen Schale für alle Punkte der Grenzfläche der Schale wie des inneren hohlen Raumes einen constanten Werth hat, und zwar ist derselbe:

$$V = \tfrac{1}{2} M \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}},$$

falls M die Masse der Schale, a, b, c die Halbaxen des Grenzellipsoids bezeichnen. Zugleich erhält man das Potential der Schale für äussere Punkte x, y, z, wenn man als untere

Grenze des Integrals τ an Stelle von 0 setzt, wo τ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\tau}+\frac{y^2}{b^2+\tau}+\frac{z^2}{c^2+\tau}=1$$

ist. Die Dichtigkeit δ in einem Punkte x, y, z der Schale ist der Dicke der Schale proportional und hat den Werth

$$\delta=\frac{M\cdot\lambda}{4\pi abc},$$

falls mit λ das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene des Punktes x, y, z gefällte Loth bezeichnet wird. Nun ist

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4},$$

und da

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$$

ist, so geht der obige Ausdruck für δ in folgenden über:

$$\delta=\frac{M}{4\pi bc\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+a^2\left(\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}}.$$

Das Resultat gilt noch, wenn a kleiner und kleiner und schliesslich $=0$ wird. Dann geht das Ellipsoid in eine Ellipse mit den Halbaxen b, c über. Masse von der Dichtigkeit δ ist in diesem Grenzfall aber auf beiden Seiten der Ellipse vertheilt. Falls man die beiderseits liegenden Massen zusammenfasst, wird daher die Dichtigkeit in einem Punkte der Ellipse

$$\delta_1=\frac{M}{2\pi bc\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}},$$

und ihr Potential

$$V_1=\tfrac{1}{2}M\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t(b^2+t)(c^2+t)}}.$$

Geht die Ellipse in einen Kreis über, so wird $b=c=R$, und wenn man noch $y^2+z^2=\varrho^2$ setzt, so erhält man

$$\delta_1 = \frac{M}{2\pi R\sqrt{R^2 - \varrho^2}},$$

$$V_1 = \tfrac{1}{2} M \int_0^\infty \frac{dt}{(R^2 + t)\sqrt{t}} = \frac{M}{R} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\delta_1 = \frac{V_1}{\pi^2 \sqrt{R^2 - \varrho^2}},$$

und für $V_1 = \frac{1}{2} B$, $\delta_1 = l$ ergeben sich die Formeln des Textes.

Will man umgekehrt zeigen, dass für die Dichtigkeit

$$\delta_1 = \frac{m}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}},$$

wo m eine gegebene Constante, das Potential des Kreises in allen Punkten des letzteren denselben Werth hat, so wird man am besten Polarcoordinaten einführen, deren Pol der angezogene Punkt ist.

Für äussere Punkte wird das Potential des Kreises

$$V_1' = \tfrac{1}{2} M \int_\tau^\infty \frac{dt}{(R^2 + t)\sqrt{t}} = \frac{M}{R} \operatorname{arctg}\left(\frac{R}{\sqrt{\tau}}\right),$$

wo τ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\varrho^2}{R^2 + \tau} + \frac{x^2}{\tau} = 1$$

ist.

46) *Zu S. 68.* Ist $R_1 : R$ endlich, so ist nach S. 45 B von der Ordnung $A\varepsilon$, daher $\operatorname{tang} k\alpha$ und mithin auch $k\alpha$ selbst von der Ordnung $k\varepsilon$.

47) *Zu S. 68.* Mit den Worten: »Die Bedeutung der Function χ setzen wir durch folgende Gleichung fest« ist Folgendes gemeint. Die Function χ ist durch die partielle Differentialgleichung (22^a) bestimmt. Die allgemeine Lösung derselben enthält eine willkürliche Function, und über diese wird, indem man für $\varrho\chi$ den Ausdruck (24) nimmt, eine Festsetzung getroffen. Dass der Ausdruck (24) der Gleichung (22^a) genügt, wird hinterher gezeigt.

Dass unter dem Integralzeichen x einen constanten Werth behält, heisst nur: bei der Ausführung der Integration ist x als von ϱ unabhängig anzusehen.

48) *Zu S. 70.* An Stelle der Worte: »die neue Masse« steht im Original: »die neue Dichtigkeit«.

Dass die Potentialfunction P_i eines Kreises durch die Ableitung der Potentialfunction W eines nach einer Seite sich ins Unendliche erstreckenden Cylinders ersetzt werden kann, erkennt man so: Um $\frac{dW}{dx}$ zu bilden, muss man den angezogenen Punkt in der Richtung x um $\varDelta x$ verschieben. Statt dessen kann man die Lage jenes Punktes unverändert lassen und den Cylinder in der entgegengesetzten Richtung um $\varDelta x$ verschieben, also nach der Seite der negativen x, wenn $\varDelta x$ positiv ist. Die Differenz der Potentiale des Cylinders in beiden Lagen, dividirt durch $\varDelta x$, ist das Potential der Kreisscheibe. — Ebenso kann bei der Bildung von $\frac{dW}{dy}$ an Stelle der Verschiebung des angezogenen Punktes in der Richtung $+y$ eine solche des Cylinders in der Richtung $-y$ treten. Die Differenz der Massen des Cylinders in beiden Lagen kann als eine die Oberfläche des Cylinders mit der Dichtigkeit $-\frac{A}{4\pi}\cos\omega$ bedeckende Schicht angesehen werden, wenn $-\frac{A}{4\pi}$ die constante Dichtigkeit des Cylinders ist. — ω ist hier unzweckmässiger Weise in doppelter Bedeutung gebraucht, einmal zur Bestimmung der Lage des angezogenen Punktes, nachher zur Bestimmung eines Punktes der Masse.

Uebrigens ist zu beachten, dass zwar W selbst unendlich gross wird, seine Ableitungen aber endliche Werthe haben.

Die Gleichung

$$P_i = \frac{dW}{dx}$$

ergiebt sich auch leicht durch directe Rechnung. Sind nämlich a, r, ω die cylindrischen Coordinaten eines Punktes des Cylinders, x, ϱ, 0 die des angezogenen Punktes, und setzt man zur Abkürzung

$$(x-a)^2 + (\varrho - r\cos\omega)^2 + r^2\sin^2\omega = e^2, \quad -\frac{A}{4\pi} = \delta,$$

so ist

$$W = \delta \int_0^\infty da \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{e}.$$

Da

$$\frac{d\frac{1}{e}}{dx} = -\frac{d\frac{1}{e}}{da},$$

so kann man in $\frac{dW}{dx}$ die Integration nach a ausführen, und das übrig bleibende Doppelintegral stellt P_i dar.

Ferner ist:

$$\frac{d\frac{1}{e}}{d\varrho} = \frac{r\cos\omega - \varrho}{e^3} = -\cos\omega \frac{d\frac{1}{e}}{dr} + \frac{\sin\omega}{r}\frac{d\frac{1}{e}}{d\omega}.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für $\frac{dW}{d\varrho}$ und integrirt theilweise nach r, resp. nach ω, so heben sich die dreifachen Integrale fort, und man erhält für $\chi_{,} = -\frac{dW}{d\varrho}$ den Ausdruck (26).

49) *Zu S. 71.* Der Uebergang von (26) zu (26^a) erfordert eine längere Rechnung, deren Ausführung Anfängern Schwierigkeiten bereiten dürfte, und die deshalb hier Platz finden mag.

Zur Abkürzung werde

$$R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos\omega = \lambda^2$$

gesetzt. Führt man zuerst die Integration nach a zwischen den Grenzen 0 und h aus, wo h von ω unabhängig, sonst beliebig ist, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\int_0^h \frac{da}{\sqrt{(a-x)^2+\lambda^2}} &= \log\left[h - x + \sqrt{(h-x)^2+\lambda^2}\right] - \log\left[-x + \sqrt{x^2+\lambda^2}\right] \\ &= \log(h-x) + \log\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{h-x}\right)^2}\,\right] \\ &\qquad - \log\left[-x + \sqrt{x^2+\lambda^2}\right].\end{aligned}$$

Ferner ist für jedes h:

$$\int_0^{2\pi} \log(h-x)\cos\omega d\omega = 0\,.$$

Lässt man nunmehr $h=\infty$ werden, so verschwindet bei der Integration nach ω auch das nächste Glied. Es bleibt:

$$\chi_{,} = \frac{AR}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log\left[-x+\sqrt{x^2+\lambda^2}\,\right]\cos\omega d\omega\,,$$

woraus durch theilweise Integration

$$\chi_{,} = -\frac{AR^2\varrho}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\omega d\omega}{\sqrt{x^2+\lambda^2}\left[-x+\sqrt{x^2+\lambda^2}\right]}$$
$$= -\frac{AR^2\varrho}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\omega d\omega}{\lambda^2}+\int_0^{\pi}\frac{x\sin^2\omega d\omega}{\lambda^2\sqrt{x^2+\lambda^2}}\right\}.$$

folgt. Weiter ist

$$\frac{\sin^2\omega}{\lambda^2}$$
$$= \frac{\cos\omega}{2R\varrho}+\frac{R^2+\varrho^2}{4R^2\varrho^2}-\frac{(R^2-\varrho^2)^2}{4R^2\varrho^2}\cdot\frac{1}{R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos\omega}\,,$$

daher

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\omega d\omega}{\lambda^2} = \frac{\pi}{4R^2\varrho^2}\left\{R^2+\varrho^2-\frac{(R^2-\varrho^2)^2}{\sqrt{(R^2+\varrho^2)^2-4R^2\varrho^2}}\right\}.$$

Da die Quadratwurzel den positiven Wurzelwerth bezeichnet, so ist

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\omega d\omega}{\lambda^2} = \frac{\pi}{2\varrho^2} \text{ für } \varrho > R\,,$$
$$= \frac{\pi}{2R^2} \text{ für } R > \varrho\,;$$

und man erkennt, dass der erste Theil von $\chi_{,}$ gleich der im Text mit $-c$ bezeichneten Grösse ist.

Im zweiten Theile von $\chi_{,}$ wende man dieselbe Partialbruchzerlegung für $\frac{\sin^2\omega}{\lambda^2}$ an, wie oben, setze dann

$$\omega = \pi - 2u\,,$$

so erhält man:

$$\chi_{,} + c = \frac{-ARx}{2\pi\sqrt{x^2+(R+\varrho)^2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2 u}}\times$$

$$\left\{-\cos 2u + \frac{R^2+\varrho^2}{2R\varrho} - \frac{(R^2-\varrho^2)^2}{2R\varrho}\frac{1}{(R+\varrho)^2-4R\varrho\sin^2 u}\right\}.$$

Drückt man das Verhältniss $\frac{R}{\varrho}$ durch $\varkappa_{,}\sin\vartheta$ aus und beachtet, dass, da x negativ, $\cos\vartheta$ aber positiv ist,

$$x = \frac{-\varkappa_{,}\cos\vartheta(R+\varrho)}{\varkappa}$$

wird, so ergiebt sich:

$$\chi_{,} + c = \frac{AR}{\pi}\left\{\frac{\varkappa_{,}\cos\vartheta}{\sqrt{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\vartheta}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2 u\,du}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2 u}}\right.$$

$$\left.-\frac{\varkappa_{,}\sin\vartheta}{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\vartheta}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\varkappa_{,}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sqrt{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\vartheta}\sin^2 u\,du}{[1-(1-\varkappa_{,}^2\sin^2\vartheta)\sin^2 u]\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2 u}}\right\}.$$

Das erste der Integrale rechts hat den Werth $\frac{1}{\varkappa^2}(K-E)$, das zweite nach *Legendre* (Traité des fonctions ellipt. T. I, Chap. XXIII, S. 138; vgl. auch *Enneper*, Elliptische Functionen, 2. Auflage, S. 248) den Werth

$$\tfrac{1}{2}\pi + (K-E)F'_{\vartheta} - KE'_{\vartheta};$$

und somit geht die letzte Formel für $\chi_{,}$ unmittelbar in die Gleichung (26^a) des Textes über.

Uebrigens nimmt das zweite Integral, wenn man

$$\sqrt{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\vartheta} = \varkappa\,\text{sinam}\,(ia + K - iK'),\ \sin u = \text{sinam}\,v$$

setzt, die *Jacobi*'sche Normalform des vollen elliptischen Integrals dritter Gattung an, und die Anwendung bekannter Formeln der elliptischen Functionen ergiebt ebenfalls den vorher angeführten Werth.

50) *Zu S. 72.* Nach der am Schluss von Anmerkung 45) (S. 117) angeführten Formel wird P_l, das an dem Kreise R

den constanten Werth $\frac{1}{2}B$ annimmt, für Punkte ausserhalb des Kreises

$$P_l = \frac{M}{R} \operatorname{arctg}\left(\frac{R}{\sqrt{\tau}}\right).$$

Ferner ist

$$M = \frac{BR}{\pi},$$

und τ, die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{\tau} + \frac{\varrho^2}{R^2 + \tau} = 1,$$

ist nach der hier eingeführten Bezeichnung $= R^2 s^2$, also

$$P_l = \frac{B}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right).$$

Für das Folgende ist zu beachten, dass eine Strömungscurve sowohl (nach S. 66) durch $\varrho\chi_{\prime\prime} =$ Const. dargestellt wird, als auch durch $\mu =$ Const., da auch die Curven $\mu =$ Const. auf den Flächen gleichen Potentials senkrecht stehen. Beim Fortschreiten auf einer Strömungscurve ändert sich allein s; da $\varrho\chi_{\prime\prime}$ sich nicht ändert, so ist $\varrho\chi_{\prime\prime}$ von s unabhängig, hat also für beliebige s denselben Werth wie für $s = 0$; d. h. in dem Ausdruck für $\chi_{\prime\prime}$ kann man $\frac{dP_l}{dx}$ durch seinen Werth an der Röhrenmündung, d. i. durch $\frac{d\overline{P}_l}{dx}$ ersetzen; natürlich muss man gleichzeitig auch in ϱ $s = 0$ setzen. — Der Werth von $\frac{d\overline{P}_l}{dx}$ ergiebt sich auch ohne jede Rechnung aus dem bekannten, schon in Anmerkung 43) benutzten Satze der Potentialtheorie. Nach demselben ist auf der Seite der negativen x: $\frac{d\overline{P}_l}{dx} = +2\pi l$, und l ist aus (23[c]) bekannt.

Was die Vorzeichen betrifft, so ist s stets positiv zu nehmen, da oben $\sqrt{\tau}$ den positiven Wurzelwerth bezeichnete. In Folge dessen muss μ das Vorzeichen von x erhalten, und da es sich um negative x handelt, ist μ negativ zu nehmen. Im Original hat, abweichend von dieser Festsetzung, μ überall das positive Zeichen. Aus dem oben angeführten Grunde war eine Aenderung des Zeichens erforderlich.

51) *Zu S. 72.* Der folgende Ausdruck für $-\mu$ ergiebt sich nicht aus dem Näherungswerthe Z. 13, sondern aus dem genauen Werthe von μ. Um letzteren zu erhalten, eliminire man s aus den beiden letzten Gleichungen S. 71, so folgt:

$$\mu^2 = 1 - \frac{x^2 + \varrho^2 + R^2}{2R^2} + \sqrt{\left(\frac{x^2 + \varrho^2 + R^2}{2R^2}\right)^2 - \frac{\varrho^2}{R^2}}\,;$$

ferner ist

$$\frac{x^2 + \varrho^2 + R^2}{2R^2} = \left(\frac{2}{\varkappa^2} - 1\right)\frac{\varrho}{R}, \quad \text{und} \quad \frac{\varrho}{R} = \frac{1 - \varkappa_{,}\sin\vartheta}{1 + \varkappa_{,}\sin\vartheta}.$$

Dass hier

$$\varkappa_{,}\sin\vartheta = \frac{R - \varrho}{R + \varrho}$$

gesetzt wird, gleichgültig, ob R oder ϱ das Grössere ist, widerspricht der Seite 71 getroffenen Festsetzung. Will man mit dieser Festsetzung in Uebereinstimmung bleiben (und das ist weiterhin S. 73 erforderlich), so muss man in der Formel für $-\mu$ (über das Vorzeichen vgl. die vorhergehende Anmerkung) $\pm\sin\vartheta$ an Stelle von $\sin\vartheta$ setzen; und es gilt das Zeichen $+$ für $R > \varrho$, dagegen das Zeichen $-$ für $\varrho > R$.

Die Formel Z. 5 v. u. enthält im Original einen Druckfehler.

Die letzte Gleichung S. 72 ergiebt sich folgendermaassen. Da die durch die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \varrho(\chi_0 + \chi_{,} - \chi_{,,}) = \text{Const}$$

dargestellte Fläche durch den Rand der Oeffnung gehen soll, so müssen die Werthe $x = 0$, $\varrho = R$ der Gleichung (a) genügen. Demnach ist Const. der Werth, den die linke Seite von (a) für $x = 0$, $\varrho = R$ annimmt; d. h. es ist

$$\text{Const} = \int_0^R \left(\frac{d\overline{\Phi}}{dx} + \frac{d\overline{P}_i}{dx} - \frac{d\overline{P}_l}{dx}\right)\varrho\, d\varrho\,.$$

Nun ist nach (21^d) und (21^f)

$$\frac{d\overline{\Phi}}{dx} + \frac{d\overline{P}_i}{dx} - \frac{d\overline{P}_l}{dx} = \frac{d\overline{\Psi}_i}{dx} = \frac{d\overline{\Psi}'}{dx},$$

also

$$\text{Const} = \int_0^R \frac{d\overline{\Psi}'}{dx}\varrho\, d\varrho = \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi}'}{dx} d\omega\,,$$

wenn $d\omega$ ein Flächenelement der Oeffnung bezeichnet, und nach (22^b) S. 67 ist

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\Psi'}{dx}d\omega = \tfrac{1}{2}AR_1^2.$$

52) *Zu S. 73.* Hinsichtlich der Ableitung der Näherungsformel ist Folgendes zu beachten.

a) In derselben ist $\varrho > R$ angenommen (der Grund dafür wird sich weiterhin ergeben). Es ist deshalb (vgl. vorige Anmerkung) in der Formel für μ S. 72 $-\sin\vartheta$ an Stelle von $\sin\vartheta$ zu setzen; denn da in $\chi_{,}$ die Festsetzung getroffen ist, dass $\sin\vartheta$ immer positiv zu nehmen sei, muss nothwendigerweise diese Festsetzung auch bei $\chi_{,,}$ getroffen werden. Durch Entwickelung nach Potenzen von $\sin\vartheta$ folgt dann:

$$-\mu = \sqrt{\frac{2\varkappa_{,}}{1+\varkappa_{,}}}\sqrt{\frac{1-\sin\vartheta}{1-\varkappa_{,}\sin\vartheta}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\varkappa_{,}}{1+\varkappa_{,}}}\left\{1-\frac{1-\varkappa_{,}}{2}\sin\vartheta-\tfrac{1}{8}\sin^2\vartheta\right\},$$

falls man schon $-\tfrac{1}{4}\varkappa_{,}\sin^2\vartheta+\tfrac{3}{8}\varkappa_{,}^2\sin^2\vartheta$ in der Klammer vernachlässigt. Da ferner für $R = R_1$ nach S. 68

$$B = -\tfrac{1}{4}\pi RA$$

wird, so erhält man:

$$-\varrho\chi_{,,} = \frac{AR^2}{4}$$

$$-\frac{AR^2}{4}\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa_{,}}}\left\{\sqrt{2\varkappa_{,}}-\frac{1-\varkappa_{,}}{\sqrt{2\varkappa_{,}}}\varkappa_{,}\sin\vartheta-\frac{\varkappa_{,}\sin^2\vartheta}{4\sqrt{2\varkappa_{,}}}\right\}.$$

b) Entwickelt man in den Integralen F'_ϑ, E'_ϑ (S. 71) die Quadratwurzel und bedenkt, dass $\sin\omega < \sin\vartheta$, so ist schon $\varkappa_{,}^2\sin^2\omega$ gegen 1 zu vernachlässigen. Es wird demnach

$$F'_\vartheta = E'_\vartheta = \vartheta,$$

und für ϑ kann man bei der vorliegenden Näherung $\sin\vartheta$ setzen, für $\cos\vartheta$ aber $1-\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta$. Endlich ist für c zu setzen $\dfrac{AR^2}{4\varrho}$. So ergiebt sich:

$$\varrho\chi_{,} = \frac{AR\varrho}{\pi}\left\{\frac{\varkappa_{,}}{\varkappa^2}(K-E)\left(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta\right) - \varkappa_{,}\sin\vartheta\left[\tfrac{1}{2}\pi - E\sin\vartheta\right]\right\} - \frac{AR^2}{4}.$$

c) Setzt man die vorstehenden Ausdrücke nebst

$$\varrho\chi_0 = \tfrac{1}{2}A\varrho^2$$

in (27^b) ein, setzt ferner $R_1 = R$, dividirt durch $\frac{1}{4}AR^2$ und beachtet, dass bei der vorliegenden Näherung

$$\frac{\varrho}{R} = 1 + 2\varkappa_{,}\sin\vartheta, \quad \frac{\varrho^2}{R^2} = 1 + 4\varkappa_{,}\sin\vartheta$$

wird, so ergiebt sich die letzte Formel S. 73. Dieselbe enthält übrigens im Original einen Druckfehler. Dort steht in der letzten Klammer fälschlich $\frac{2\varkappa_{,}}{\pi\varkappa^2}(K-E)$ statt $\frac{2}{\pi\varkappa^2}(K-E)$.

d) Würde man statt $\varrho > R$ die Annahme $\varrho < R$ zu Grunde legen, so würde man ganz dieselbe Näherungsformel erhalten, nur dass der zweite, mit $\varkappa_{,}\sin\vartheta$ multiplicirte Summand das entgegengesetzte Vorzeichen hätte.

Nun giebt die numerische Rechnung mittelst der Näherungsformel für alle $\varkappa_{,}$ einen positiven Werth von $\sin\vartheta$ nur unter der ersten Annahme $\varrho > R$; mithin ist, da $\sin\vartheta$ stets positiv genommen werden soll, allein die erste Annahme $\varrho > R$ zutreffend.

Legendre's Tafeln der elliptischen Integrale finden sich in dessen »Traité des fonctions elliptiques«, T. II.

52[a]) *Zu S. 73 und 74.* Die erste Formel S. 74 enthält im Original einen Fehler, indem dort im Nenner $1 + \varkappa_{,}\sin\vartheta$ statt $1 - \varkappa_{,}\sin\vartheta$ steht. Die falsche Formel ist auch der folgenden numerischen Rechnung zu Grunde gelegt. Bei Anwendung der richtigen Formel würden alle Zahlen der Columne $\frac{\varrho - R}{R}$ ein wenig grösser ausfallen, doch nicht erheblich. — In der Ueberschrift der letzten Columne fehlt im Original das Zeichen —.

53) *Zu S. 74.* Im Original lautet die letzte Formel S. 74:

$$\frac{\varrho - R}{R} = \frac{1}{32}\left(\frac{2R - x}{2R + x}\right)^2 \text{ statt } \frac{\varrho - R}{R} = \frac{1}{32}\frac{R^4}{x^4}.$$

Dass die letztere Formel richtig ist, erkennt man aus Folgendem. In grösserer Entfernung von der Scheibe ist x^2 sehr

gross gegen R^2 und ϱ^2, daher $\varkappa$ sehr klein. Nun erhält man für kleine $\varkappa$ durch Entwickelung nach Potenzen dieser Grösse:

$$\frac{K-E}{\varkappa^2}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\omega\, d\omega}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}}=\frac{\pi}{4}\left(1+\tfrac{3}{8}\varkappa^2+\tfrac{15}{64}\varkappa^4+\cdots\right),$$

$$\sqrt{\frac{2}{\varkappa_{,}(1+\varkappa_{,})}}=1+\tfrac{3}{8}\varkappa^2+\tfrac{31}{128}\varkappa^4+\cdots.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die letzte Gleichung S. 73, nachdem man durch $\varkappa_{,}$ dividirt hat, so erkennt man, dass $\sin\vartheta$ von der Ordnung $\varkappa^4$ ist. Man kann daher $\sin^2\vartheta$ vernachlässigen und in dem Factor von $\sin\vartheta$ die mit $\varkappa^2$ multiplicirten gegen die von $\varkappa$ freien Glieder. Dann ergiebt sich:

$$0=-\frac{\varkappa^4}{128}+\sin\vartheta\cdot 8\,,\quad \text{d. h.}\quad \sin\vartheta=\left(\frac{\varkappa^2}{32}\right)^2.$$

Mit derselben Näherung wird

$$\frac{\varrho-R}{R}=2\left(\frac{\varkappa^2}{32}\right)^2,\quad \varkappa^2=\frac{4R^2}{x^2},$$

mithin

$$\frac{\varrho-R}{R}=\tfrac{1}{32}\frac{R^4}{x^4}.$$

54) *Zu S. 74 und 75.* Die erste Formel S. 75 leitet man folgendermaassen ab. Für sehr kleine Werthe von $\varkappa_{,}$ ist

$$E=1\,,\quad K=\log\left(\frac{4}{\varkappa_{,}}\right).$$

(vgl. *Legendre*, Traité des fonctions elliptiques, I, Chap. XIX, *Durège*, Theorie der elliptischen Functionen, § 50). Ferner wird

$$F'_{\vartheta}=E'_{\vartheta}=\vartheta\,.$$

Demnach erhält man, wenn man alle Potenzen von $\varkappa_{,}$, die höher als die erste sind, vernachlässigt, folgende Näherungswerthe:

$$\varrho\chi_{,}=\frac{AR\varrho}{\pi}\left\{\varkappa_{,}\cos\vartheta\left[\log\left(\frac{4}{\varkappa_{,}}\right)-1\right]-\varkappa_{,}\sin\vartheta\left[\tfrac{1}{2}\pi-\vartheta\right]\right\}-\frac{AR^2}{4},$$

$$-\varrho\chi_{,,}=\frac{AR^2}{4}-\frac{AR^2}{4}\sqrt{2\varkappa_{,}(1-\sin\vartheta)}$$

[vgl. Anmerkung 52)]. Die Substitution dieser Ausdrücke in (27^b), in der $R_1 = R$ zu setzen ist, giebt nach Division durch $\frac{AR\varrho}{\pi}$:

$$\varkappa_{,} \cos\vartheta \left[\log\left(\frac{4}{\varkappa_{,}}\right) - 1\right] - \varkappa_{,} \sin\vartheta \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$$
$$- \frac{\pi}{4} \frac{R}{\varrho} \sqrt{2\varkappa_{,}} \sqrt{1 - \sin\vartheta} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\varrho}{R} - \frac{R}{\varrho}\right) = 0.$$

Ferner ist bei der vorliegenden Näherung

$$\frac{R}{\varrho}\sqrt{2\varkappa_{,}} = \sqrt{2\varkappa_{,}}, \quad \frac{\varrho}{R} - \frac{R}{\varrho} = 4\varkappa_{,} \sin\vartheta$$

zu setzen. Nach Substitution dieser Werthe und Division durch $\varkappa_{,} \cos\vartheta$ geht die letzte Gleichung unmittelbar in die erste Gleichung S. 75 über.

Die Formel Z. 6 folgt so: Durch Division der beiden ersten Gleichungen S. 74 erhält man

$$\frac{\varrho - R}{-x} = \varkappa \operatorname{tang}\vartheta = \tfrac{1}{8}\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa_{,}}}\sqrt{\varkappa}.$$

Ferner ist

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa_{,}}} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{R\varrho}}{\sqrt[4]{x^2 + (R-\varrho)^2}},$$

während $\sqrt{\varkappa}$ sehr nahe $= 1$, $R\varrho$ sehr nahe $= R^2$ ist. — Dass x gegen $\varrho - R$ sehr klein ist, folgt aus der vorstehenden Formel für $\frac{\varrho - R}{-x}$, da in derselben $\varkappa$ nahe $= 1$, ϑ nahe $= \frac{1}{2}\pi$ ist.

55) *Zu S. 76.* $\frac{d\Psi}{dn}$ ist in der ganzen Oberfläche $= 0$, ausser in den Oeffnungen, wo es endliche, von k unabhängige Werthe hat. Daher ist $k^2 \frac{d\Psi}{dn}$ für $k = 0$ auch in den Oeffnungen $= 0$, $\frac{d\chi}{dn}$ verschwindet mithin an der ganzen Oberfläche. Dass im ganzen Innenraume $\chi =$ Const. ist, folgt aus

dem *Green*'schen Satze, demselben, der S. 77 auf die Function Ψ angewandt wird [vgl. Heft 61 der Klassiker, S. 121, Anm. 9)]. — Das für den Fall $k = 0$ Gesagte soll nur als Vorbereitung für das folgende Resultat dienen.

55[a]) *Zu S. 77.* Multiplicirt man Gleichung (28) mit ε^2, so ist die linke Seite von der Ordnung $\varepsilon^2\eta^2$; das erste Glied rechts ist von niedrigerer Ordnung. Im zweiten Gliede rechts ist $\int d\omega$ von der Ordnung 1, da Ψ nicht nur in den Oeffnungen, sondern an der ganzen Wand von Null verschieden sein kann. Das zweite Glied rechts wird also von der Ordnung $\varepsilon^2 k^2 r \Psi$, und damit $\varepsilon^2 \Psi$ endlich werde, muss $k^2 r$ von derselben Ordnung sein wie $\varepsilon^2\eta^2$.

Zu Gleichung (28[a]) ist zu bemerken: Da $\varepsilon^2 \Psi$ endlich, so ist das Raumintegral rechts von der Ordnung $\frac{k^2 S}{\varepsilon^2} = \frac{\eta^2 S}{r}$, falls S das Volumen von S ist. S ist aber von der Ordnung r^3, also jenes Integral von der Ordnung $\eta^2 r^2$, während das Flächenintegral rechts von der Ordnung η^2 ist.

55[b]) *Zu S. 78.* Da Ψ ein Geschwindigkeitspotential darstellt, sind $\frac{d\Psi}{dx}, \frac{d\Psi}{dy}, \frac{d\Psi}{dz}$ die Geschwindigkeitscomponenten parallel den Axen. Andererseits ist $\frac{d\Psi}{dn}$ die ganze Geschwindigkeit, da die Componenten senkrecht zu n verschwinden. Folglich ist

$$\frac{d\Psi}{dn} = \sqrt{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2}$$

und

$$\frac{d\Psi}{dn} dn = d\Psi.$$

56) *Zu S. 79.* Ist dn eine unendlich kleine Länge auf der inneren Normale eines Punktes P der Oberfläche, so ist $-dr$ die Projection von dn auf r, da r nach aussen wächst. Also ist $-\frac{dr}{dn}$ der Cosinus des spitzen Winkels zwischen r und der Normale; und $\frac{n}{r}$ ist der Cosinus des gleichen Winkels. S bezeichnet das Volumen des Raumes S.

Was den constanten Werth C betrifft, so ist zu beachten,